



UNIVERSIDAD NACIONAL DE COLOMBIA

# Interpolación de los datos de Radón calculados a partir de proyecciones tomográficas *Cone-Beam* en trayectoria circular

**Carlos Augusto Jiménez Millán**

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería de Sistemas e Industrial  
Bogotá, Colombia  
2012



# Interpolación de los datos de Radón calculados a partir de proyecciones tomográficas *Cone-Beam* en trayectoria circular

**Carlos Augusto Jiménez Millán**

Tesis presentada como requisito parcial para optar al título de:  
**Magister en Ingeniería de Sistemas y Computación**

Director(a):  
Ph.D. Eduardo Romero Castro

Línea de Investigación:  
Representación de Imágenes Médicas  
Grupo de Investigación:  
BioIngenium

Universidad Nacional de Colombia  
Facultad de Ingeniería, Departamento de Ingeniería de Sistemas e Industrial  
Bogotá, Colombia  
2012



# Agradecimientos

En este espacio, el único de todo el documento en el que se pueden expresar los sentimientos del autor, quiero confesar que llevar este trabajo a feliz término no me fue nada fácil. El trabajo consignado en este libro me retó y midió como nada más lo ha hecho hasta ahora. Fueron muchos los momentos duros y las crisis existenciales, cada vez más fuertes y profundas. Durante este tiempo lo que me impulsó a continuar, a pesar de todas las adversidades, fue el espíritu curioso que me llevaba una y otra vez a hacerme preguntas más profundas, la alegría de entender algo muy bien y la sensación que en mí se generaba cuando todo eso se convertía en ideas. Todo esto se convirtió en el alimento de mi espíritu y la fuerza para hacer a un lado lo negativo y seguir adelante.

Siento que todo este proceso ha dejado huellas muy profundas en mí. En este instante, en el que miro atrás y recuerdo el camino que tuve que recorrer para llegar a este punto, no puedo sentir nada diferente a un profundo agradecimiento hacia todas las personas y hacia todas las circunstancias que permitieron que el camino haya sido lo que fue. Tanto por las cosas buenas, como por aquellas que en su instante parecieron ser muy duras. Gracias al profesor Eduardo Romero, por su apoyo, por las discusiones que tuvimos, por los momentos de desacuerdo, por la libertad que me dió en este proceso, por los momentos duros, por los momentos buenos y, sobretodo, por creer en mí y lo que yo hacía. Gracias a Andrea, cuyo cariño y acompañamiento ha sido una constante durante todo este tiempo. Por sufrirme durante este período de mi vida, sobretodo los últimos meses, y por creer en mí (más de lo que yo mismo lo hago). Gracias al grupo de investigación Bioingenium, a todos sus integrantes que, de una u otra forma, hicieron que este camino haya sido lo que fue. A los profesores de España, Cristina Santa Marta y Daniel Rodríguez, por su interés por entender mi tema y aportar y ayudar en él. A los muchachos del LIM, en el Hospital Gregorio Marañón de Madrid, quizá no lo sepan pero el haberme acogido y haberme dado un espacio para trabajar en su grupo fue crucial en uno de los momentos más duros. A Mónica, la retroalimentación que recibí de ella, y el nivel que alcanzaron nuestras discusiones y pruebas, intentando desentrañar y comprender el funcionamiento de mi método, fueron altamente enriquecedores.

Obviamente, gracias a mi familia. Gracias a mi mamá por acompañarme y apoyarme en todo este proceso, por estar pendiente de su avance, por darme cariño. Gracias Nani.

A todos los que he mencionado, y a algunos cuantos que sin intención he pasado por alto, muchas gracias por haber hecho de este proceso lo que fué.



## Resumen

La Tomografía Computarizada *Cone-Beam* es una técnica de adquisición de imágenes volumétricas en la cual una zona del cuerpo es irradiada con un fuente puntual de rayos X. Este tipo de técnica es utilizada en diferentes aplicaciones médicas, como en el tratamiento del cáncer de próstata, en el cual se efectúa una reconstrucción tomográfica previa a la radioterapia con el fin de establecer la posición correcta de la próstata y la estrategia correcta para radiar esa zona.

Cuando la trayectoria de captura de las proyecciones es circular, los algoritmos de reconstrucción deben resolver la ausencia de datos asociada a que la fuente de radiación no intersecta todos los planos que cortan el cuerpo. El método de reconstrucción analítica propuesto por Grangeat establece la posibilidad de calcular la derivada de la transformada de Radón del objeto a partir de las proyecciones *cone-beam*. Para este método de reconstrucción, la imposibilidad de hacer una reconstrucción perfecta se refleja en la ausencia de datos en una zona de sombra (*shadow-zone*) en el espacio de Radón. Esta zona de sombra es mayor mientras más cerca se encuentre la fuente de radiación del objeto a reconstruir. En particular, para la aplicación de planeación de radioterapia para pacientes con cáncer de próstata, alejar la fuente de radiación implica una menor focalización de la zona afectada, radiando zonas aledañas.

El relleno de este *shadow-zone* suele tratarse como un problema de interpolación convencional, aplicando métodos simples que no consideran la naturaleza inherente de los datos a interpolar. Este trabajo propone un método de estimación de los datos faltantes del *shadow-zone*, agrupando los datos de la derivada de Radón en planos meridionales y regularizando la proyección *parallel-beam* asociada a estos datos por medio de un filtrado iterativo. Se muestran las ventajas y alcances de este método comparándolo con métodos de interpolación convencionales, y obteniendo una mejora en la relación señal a ruido (PSNR) de hasta 2 dB.

**Palabras clave:** Tomografía Computarizada *cone-beam*, Relación de Grangeat, Transformada de Radón.

# Abstract

Cone-Beam Computed Tomography (CBCT) is a medical imaging technique for acquisition of volumetric images of the human body, where the region of interest is irradiated with a punctual source of X rays. This technique is currently used in different medical applications, such as in the treatment of prostate cancer, where a tomographic reconstruction is obtained before radiotherapy to accurately identify the prostate position and the amount of the radiation dose.

When using a circular trajectory for capturing CBCT projections, reconstruction algorithms must take into account the absence of data produced when the radiation source do not intersect the body cutting plane. With the analytic reconstruction method proposed by Grangeat, the Radon transform derivative can be calculated from cone-beam projections. For this method, the missing data is located in a so called shadow-zone in the Radon space, making it impossible to obtain a perfect reconstruction. The shadow-zone size (amount of missing data) increases as the radiation source is closer to the object to be reconstructed. In particular, for radiotherapy planning of prostate cancer patients, moving away the radiation source means to spread the radiation dose, affecting healthy organs near the prostate.

Filling up the shadow-zone is commonly treated as a conventional interpolation problem, by applying standard and simple methods that do not take into account the nature of the data to be interpolated. This work proposes an estimation method of missing data in the shadow-zone, by grouping the Radon derivative data into meridional planes and then regularizing the parallel-beam projection associated to this data with an iterative filtering. Performance and advantages of the proposed method are presented by comparing it with conventional interpolation methods, and obtaining an increment in the peak signal-to-noise ratio (PSNR) of about 2 dB.

**Keywords:** Cone-beam Computed Tomography, Grangeat's relation, Radon transform.



# Contenido

<b>Agradecimientos</b>	<b>v</b>
<b>Resumen</b>	<b>vii</b>
<b>Notación</b>	<b>xi</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Captura de las proyecciones . . . . .	2
<b>2. Marco Teórico</b>	<b>6</b>
2.1. Transformada de Radon . . . . .	6
2.1.1. La Transformada de Radon en CT . . . . .	6
2.2. Reconstrucción . . . . .	8
2.2.1. Reconstrucción directa de Fourier . . . . .	11
2.2.2. Retroproyección . . . . .	13
2.3. Tomografía <i>cone-beam</i> . . . . .	16
2.3.1. Condición de suficiencia . . . . .	17
2.3.2. Reconstrucción . . . . .	17
2.4. Los datos en el método de reconstrucción analítico basado en Grangeat . . .	19
2.4.1. Ubicación en el espacio de Radon 3D . . . . .	19
<b>3. Trabajos relacionados</b>	<b>25</b>
<b>4. Relleno del shadow-zone</b>	<b>32</b>
4.1. <i>Rebinning</i> en dirección de $\phi$ . . . . .	32
4.2. Relleno del <i>shadow-zone</i> por regularización de las proyecciones <i>parallel-beam</i>	35
4.3. Resultados . . . . .	37
4.3.1. Reconstrucción variando la distancia de la fuente de radiación . . . .	40
4.3.2. Comparación entre métodos de interpolación sobre las proyecciones <i>parallel-beam</i> . . . . .	41
4.3.3. Comparación entre métodos de interpolación sobre la reconstrucción .	43
<b>5. Conclusiones</b>	<b>46</b>
5.1. Trabajos futuros . . . . .	46

<b>A. Relación de Grangeat</b>	<b>48</b>
<b>B. Productos</b>	<b>53</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>54</b>

# Notación

$\mathcal{S}$	Espacio de Schwartz
$\vec{a}$	Vector
$ a $	Valor absoluto de $a$
$\ a\ $	Norma o distancia Euclidiana de $a$
$a \cdot b$	Producto punto de vectores $a$ y $b$
$a \times b$	Producto cruz de vectores $a$ y $b$
$\star$	Operador unidimensional de convolución
$\star\star$	Operador bidimensional de convolución
$\mathcal{F}\{g(x)\}(\omega)$	Transformada de Fourier de la función $g(x)$ en el dominio $\omega$
$\partial f$	Derivada parcial de $f$

# 1. Introducción

La tomografía computarizada (*Computed Tomography*, CT) es la primera técnica no invasiva de adquisición de imágenes del interior de un objeto; su invención a finales de los años 60[19, 18, 6] se inspiró en la posibilidad de observar el interior del cuerpo humano sin la necesidad de realizar algún tipo de incisión o insertar algún tipo de objeto extraño en él. Esta técnica fue planteada por Godfrey Hounsfield quien, inspirado en la adquisición de proyecciones radiográficas de un objeto por medio de la radiografía, técnica desarrollada a lo largo de la primera mitad del siglo XX, ideó la posibilidad de reconstruir un corte transversal del cuerpo humano a partir de varias proyecciones radiográficas adquiridas desde diferentes posiciones [17, 20]. Esta idea base sirvió también como principio para otras técnicas de adquisición de imágenes como *PET*<sup>1</sup> y *SPECT*<sup>2</sup>. Este trabajo está enfocado en la Tomografía Computarizada, en la que la fuente de radiación es externa al objeto a reconstruir, y los datos a partir de los cuales se hace la reconstrucción son las integrales de línea de la densidad del objeto a lo largo de la trayectoria de los rayos X.

En esencia, los rayos X constituyen un tipo de radiación electromagnética de alta energía, cuya frecuencia es de 50 a 50.000 veces la frecuencia de la luz visible, capaz de atravesar objetos y materiales con densidades menores a las del plomo. Al atravesar un objeto, un porcentaje de la energía del rayo es absorbida por el material; este porcentaje está directamente relacionado con la densidad del mismo. De esta forma, un grupo de rayos X que atraviesan un objeto proyectan una imagen o sombra que revela la densidad del material del objeto a lo largo de la trayectoria de cada uno de los rayos. Este proceso físico constituye la clave de la radiología, y la imagen o sombra generada es conocida como radiografía, o *proyección tomográfica* cuando sirve como paso intermedio en la obtención de un corte o una imagen volumétrica. Convencionalmente, la radiografía se registra sobre un material fotosensible. Sin embargo, diversos avances en décadas recientes han permitido registrar la radiografía directamente sobre un arreglo bidimensional de sensores fotoeléctricos, posibilitando de esta forma su almacenamiento, transmisión y procesamiento.

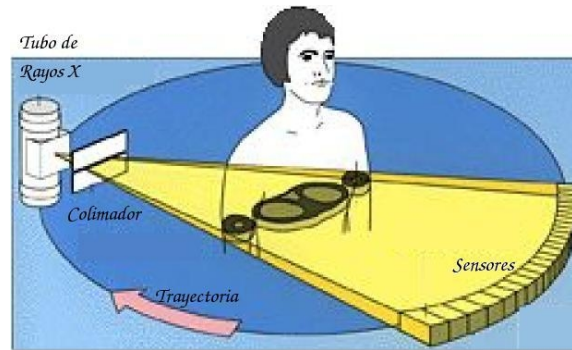
Para la tomografía de Rayos X, la información a reconstruir es la densidad del cuerpo. Los rayos son generados por un *tubo de rayos X* externo al objeto o cuerpo a reconstruir. Los rayos X viajan en línea recta atravesando el cuerpo y pierden parte de su energía. De esta forma, la energía perdida por el rayo durante su trayecto desde la fuente de radiación, a través del cuerpo y hasta el fotosensor se puede calcular del valor registrado en el mismo

---

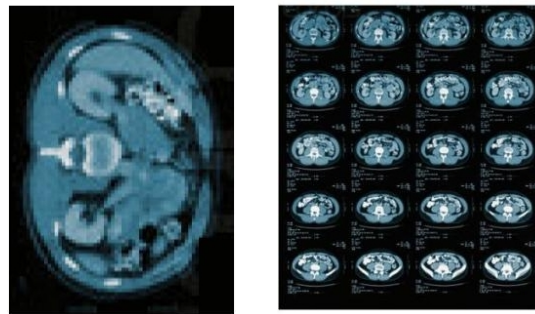
<sup>1</sup>*Positron Emission Tomography*, Tomografía de emisión de positrones.

<sup>2</sup>*Single-Photon Emission Computed Tomography*, Tomografía de emisión de un único fotón.

fotosensor (Ver Figura 1.1(a)).



(a) Captura de las proyecciones sobre un solo corte del objeto. (Tomada de <http://eltamiz.com/2008/01/22/%C2%BFen-que-consiste-una-tomografia-axial-computarizada-tac.>)



(b) Corte tomográfico. (c) Estudio tomográfico.

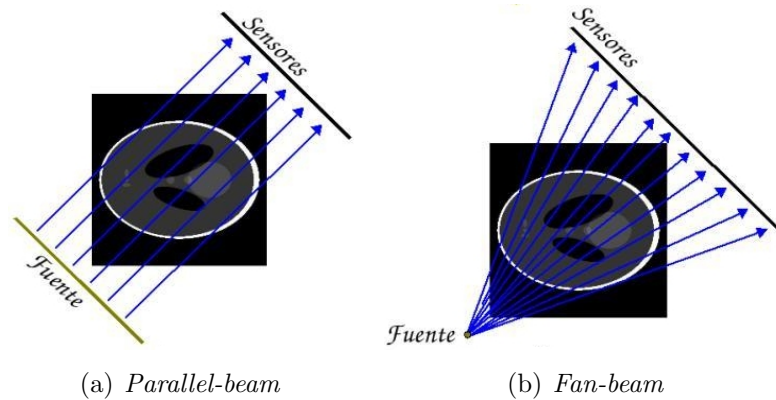
**Figura 1-1.:** Ilustración de la tomografía *mono-slice*.

## 1.1. Captura de las proyecciones

Para la captura de las proyecciones existen dos factores a tener en cuenta: el tiempo necesario para adquirir una proyección y la cantidad de radiación que debe soportar el objeto. Para objetos inertes y sin vida, ninguno de estos factores importa, excepto por el costo energético o la eficiencia del tomógrafo. Sin embargo, en aplicaciones médicas los objetos son seres vivos, para quienes los rayos X inducen cambios químicos en el organismo, dada la naturaleza ionizante de dichos rayos. Por otra parte, movimientos como la respiración y el latido del corazón, así como la dilatación y contracción de venas y arterias, además de movimientos voluntarios o involuntarios, inducen errores en la reconstrucción, cuya hipótesis fundamental es que el objeto no se mueve. Si bien existen algunas aproximaciones que buscan corregir

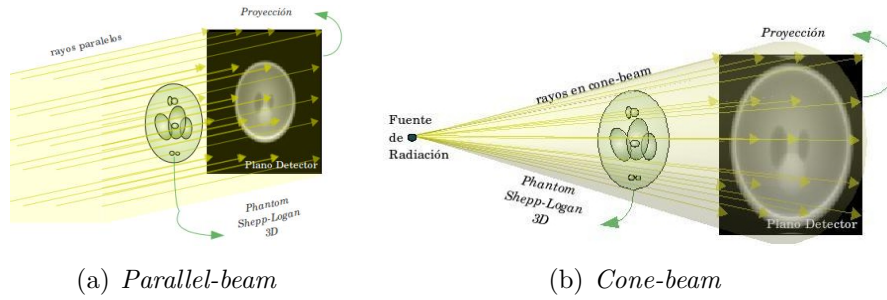
los errores debido a movimientos durante el proceso de captura, se hace imperativo mejorar los métodos de captura, tanto en su velocidad como en la cantidad de energía irradiada. Teniendo en cuenta estos factores al momento de definir la adquisición de las proyecciones, es posible considerar diferentes geometrías para las proyecciones y diferentes trayectorias para la fuente de radiación y los detectores, buscando siempre disminuir tanto el tiempo como la cantidad de radiación.

El proceso con el cual se obtienen las imágenes del interior del cuerpo consta de dos etapas principales: Adquisición de las proyecciones tomográficas y reconstrucción del interior del objeto a partir de dichas proyecciones. En la adquisición de las proyecciones el cuerpo es irradiado y los valores de atenuación de los rayos X registrados en los fotosensores. Una primera forma de clasificar las proyecciones está dada por la cantidad de cortes del cuerpo que son radiados. En los primeros años de la CT la reconstrucción se hacía corte por corte. Las proyecciones son funciones uni-dimensionales capturadas por una hilera de fotosensores (ver Figura 1.1(a)), y la función a reconstruir es una imagen bidimensional correspondiente al corte radiado (Figura 1.1(b)). La información tridimensional de las densidades de un cuerpo se obtiene por la apilación de varios cortes (Figura 1.1(c)).



**Figura 1-2.:** Geometrías de captura por cortes. Para este tipo de geometría, los rayos están confinados a un solo plano espacial. Se reconstruye un corte del cuerpo a la vez. Las proyecciones son funciones uni-dimensionales y son capturadas por una hilera de fotosensores.

La captura de proyecciones tomográficas 2D se facilitó gracias a la posibilidad de construir arreglos bidimensionales de fotosensores y al incremento en la capacidad de cómputo de los datos. De esta forma, se introdujo la tomografía *multi-slice* (ver Figura 1-3), en la que las proyecciones son funciones bidimensionales capturadas por una matriz de fotosensores, y la función a calcular corresponde a la densidad espacial tridimensional del cuerpo (Figura 1-3). La captura de las proyecciones se define entonces por su geometría y su trayectoria. Al hablar de la **geometría de las proyecciones** se hace referencia a la forma con la cual se proyectan los rayos sobre el objeto, es decir, a la orientación espacial que tienen los rayos



**Figura 1-3.:** Geometrías de captura *multi-slice*. Las proyecciones capturan la información de varios cortes a la vez. Las proyecciones son imágenes bidimensionales y son capturadas por una matriz de fotosensores ubicadas en un *plano detector*.

entre sí. De esta manera, los rayos X pueden ser paralelos, (Figuras 1.2(a) y 1.3(a)) o tener un origen espacial común (geometrías *fan-beam* y *cone-beam*, Figuras 1.2(b) y 1.3(b)).

Si bien el modelamiento matemático de la función a reconstruir es mucho más sencillo para las geometrías de *rayos paralelos*, su implementación física trae consigo la generación de los rayos en paralelo, el consumo de energía y la altas dosis de radiación a las que se sometería al paciente. Para generar el paralelismo entre los rayos es necesario mover la fuente para obtener el registro de cada rayo paralelo. Sin embargo, este tipo de aproximación requiere un tiempo de captura alto, con lo cual los errores por movimientos en organismos vivos se incrementa y requiere una corrección adicional.

Otro elemento importante a considerar en la adquisición de las proyecciones es la trayectoria de los fotosensores y de la fuente de radiación. Para las proyecciones *fan-beam* y *cone-beam*, dado que los datos capturados se encuentran dentro del mismo plano espacial, la única alternativa es la trayectoria circular. Para las proyecciones *multi-slice*, dada la naturaleza tridimensional de los datos capturados y de la reconstrucción en sí, las posibilidades son mucho más amplias, aunque en la práctica se reducen a las trayectorias circular y helicoidal. El problema de reconstruir el interior de un objeto a partir de sus proyecciones radiográficas equivale al problema inverso de *obtener una función en un espacio de  $n$  dimensiones a partir de sus proyecciones* [17, 31, 32]. Dentro del conjunto de herramientas matemáticas usadas para la reconstrucción en CT se encuentra la *Transformada de Radon*. En la siguiente sección se hará especial énfasis esta herramienta, la cual es importante en el contexto de este trabajo, dado que la reconstrucción *cone-beam* analítica que se desea utilizar pasa por el cálculo de la transformada de Radon a partir de estas proyecciones.

Para obtener una reconstrucción exacta a partir de la geometría de proyecciones *cone-beam*, es necesario que la fuente de radiación pase, al menos una vez, por todos los planos que intersectan el cuerpo a reconstruir. Esta condición no se cumple para la trayectoria circular, lo cual se refleja en un artefacto en la reconstrucción llamado *artefacto cone-beam*. Para el método analítico de reconstrucción *cone-beam* basado en la aplicación de la *relación de Grangeat* (Subsección 2.3.2), el hecho de que esta condición no se cumpla se refleja en la

carencia de algunos datos de la derivada de Radon del objeto. Estos datos forman toda una zona de sombra (*shadow-zone*) en el espacio de Radon. Esta zona de sombra es mayor mientras más cerca se encuentre la fuente de radiación del objeto a reconstruir. En particular, para la aplicación de planeación de radioterapia para pacientes con cáncer de prostata, alejar la fuente de radiación implica una menor focalización de la zona afectada, radiando zonas aledañas. Con el fin de corregir el *artefacto cone-beam* en la reconstrucción analítica, dichos datos faltantes deben ser estimados para rellenar el *shadow-zone*.

Este trabajo aborda el problema del relleno del *shadow-zone* en el espacio de Radon para los datos calculados a partir de las proyecciones *cone-beam* en trayectoria circular alrededor del objeto a reconstruir, implementando un método de estimación de estos datos que busca regularizar la función que representa el objeto a reconstruir. Con el fin de recopilar los conceptos teóricos necesarios y suficientes para entender el problema a tratar, en **Capítulo 2** presenta los conceptos matemáticos referentes a la reconstrucción analítica de la tomografía *cone-beam*. A continuación, el **Capítulo 3** describe algunos métodos de relleno del *shadow-zone* reportados en la literatura. El método propuesto se presenta en el **Capítulo 4**, junto con algunos resultados y comparación contra otros métodos de relleno y reconstrucción. Finalmente, el **Capítulo 5** recopila las conclusiones de este trabajo y expone posibles líneas de trabajo a seguir.



## 2. Marco Teórico

La comprensión de los conceptos relacionados con la reconstrucción tomográfica *cone-beam* requiere de la revisión de algunos conceptos teóricos como la tomografía computarizada misma, las diferentes formas para capturar datos, con especial énfasis en la tomografía *cone-beam*, al igual que conceptos matemáticos claves como la transformada de Radon y diferentes métodos que existen para su inversión. Este Capítulo recopila una breve revisión de estos conceptos, con el fin de aportar las bases teóricas necesarias y suficientes para entender el problema que trata este trabajo y la estrategia planteada para solucionarlo.

### 2.1. Transformada de Radon

La transformada de Radon es una transformación que mapea una función de un espacio  $n$ -dimensional hacia los valores de las integrales sobre sus hiperplanos asociados. Existen diferentes notaciones para la transformada de Radon. En este trabajo se adoptará la siguiente: Siendo  $f(\vec{r})$  una función, donde  $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$  y  $f \in \mathcal{S}^1$ , su transformada de Radon se define como:

$$Rf(s, \vec{n}) = \int_{\mathbb{R}^n} \delta(s - \vec{r} \cdot \vec{n}) f(\vec{r}) d\vec{r} \quad (2-1)$$

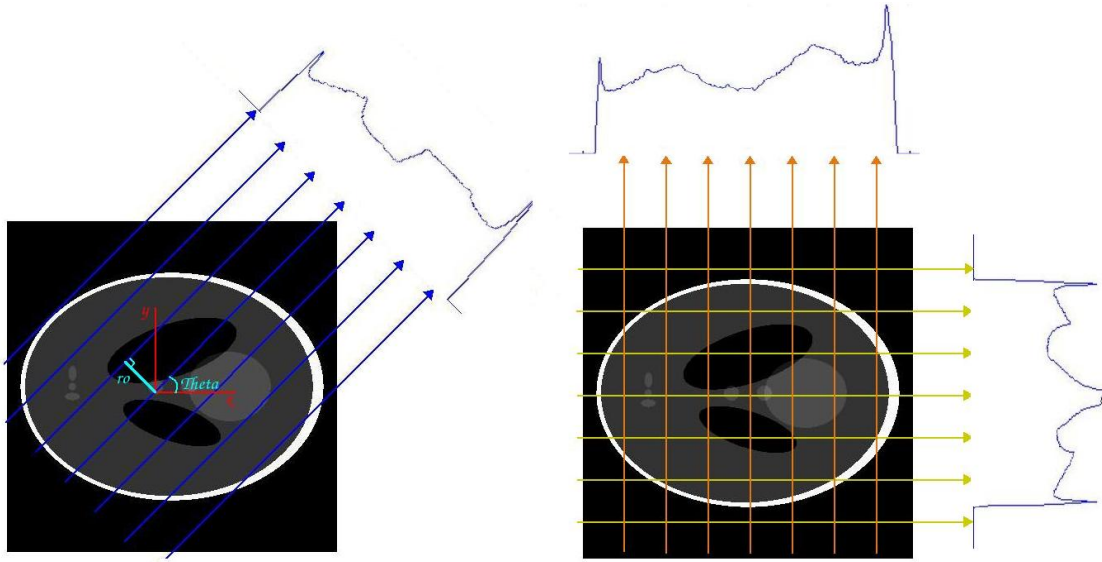
Donde  $\delta$  es la función *delta de Dirac*,  $\vec{n}$  es el vector unitario normal al hiperplano y  $s$  la distancia del hiperplano al origen de coordenadas de  $\mathbb{R}^n$  en dirección de  $\vec{n}$ .

#### 2.1.1. La Transformada de Radon en CT

La captura de proyecciones tomográficas puede verse desde la siguiente perspectiva: los objetos a irradiar corresponden a funciones de densidad en un espacio de tres dimensiones y los valores de atenuación de los rayos X registrados en los fotosensores equivalen a la integral de la función a lo largo de la trayectoria del rayo. De esta forma, si la función a reconstruir corresponde a un corte del objeto, su transformada de Radon es el resultado de las atenuaciones de los rayos, medidas directamente en los sensores fotoeléctricos (ver Figura 2-1).

---

<sup>1</sup> $\mathcal{S}$  denota al *espacio de Schwartz*, el cual es un espacio funcional en el que se encuentran todas las funciones de decrecimiento rápido.

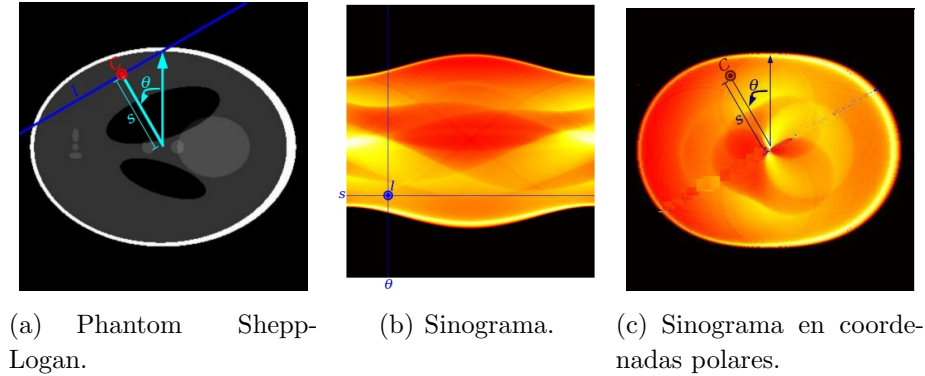


**Figura 2-1.:** Proyecciones en *parallel-beam* en diferentes ángulos. Los valores de las proyecciones corresponden a los datos de la transformada de Radon bidimensional.

Para el caso bidimensional, cada línea que atraviesa el objeto está caracterizada por su ángulo de inclinación  $\theta$  y por su distancia al origen (ubicado en el centro del objeto)  $s$  (ver Figura 2.2(a)). De esta forma, los datos de Radon pueden ser representados gráficamente en un arreglo bidimensional con los valores de  $\theta$  en las columnas y los valores de  $s$  en las filas, arreglo conocido como *sinograma* (ver Figura 2.2(b)). Dada que la transformada de Radon sigue una distribución en coordenadas polares, su sinograma puede, igualmente, graficarse en estas coordenadas (Figura 2.2(c)), en donde la integral de cada línea estaría representada por un valor de intensidad ubicado en las mismas coordenadas del *punto característico*<sup>2</sup> de la recta (mostrado en la Figura 2-2 con la letra  $C$ ).

En la tomografía de reconstrucción por cortes, las proyecciones mismas constituyen la transformada de Radon del corte a reconstruir. Para la geometría *parallel-beam*, los datos de Radon adquiridos en una sola proyección quedan ubicados en una línea a lo largo de la dirección de la distancia radial en el sinograma. Estos mismos datos ubicados en el sinograma en coordenadas polares, describen una línea recta que pasa por el origen de coordenadas (Figura 2.3(a)). Por otra parte, para la geometría *fan-beam* los datos de cada proyección quedan ubicados en el sinograma siguiendo una trayectoria senoidal, cuya amplitud es la distancia de la fuente de radiación al origen de coordenadas. Cuando el sinograma se dibuja en coordenadas polares, los datos se ubican sobre una circunferencia, la cual pasa la posición de la fuente de radiación y el origen de coordenadas, y cuyo diámetro es la distancia entre

<sup>2</sup>El *punto característico* corresponde al punto de la línea recta más cercano al origen. Su posición representa tanto la dirección de la recta como la distancia de ésta al origen coordenado.



**Figura 2-2.:** Representación gráfica de la transformada de Radon para un espacio bidimensional.

estos dos puntos (ver Figura 2.3(b)).

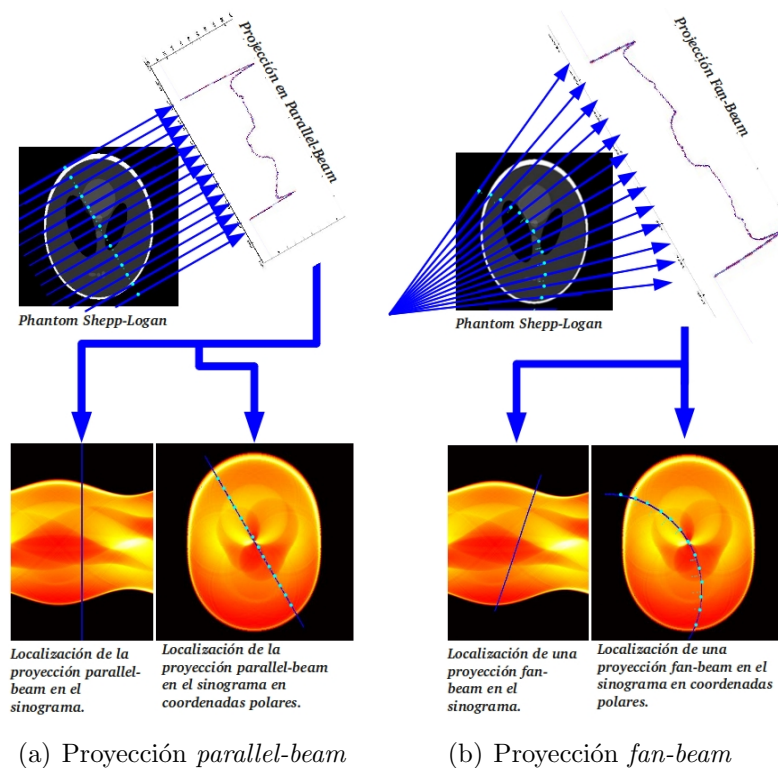
En el caso de la tomografía de múltiples cortes, los datos de Radon no están representados directamente por el valor de las proyecciones. El objeto a reconstruir es ahora una función de densidad en un espacio de tres dimensiones, para la cual la transformada de Radon no constituye la integral sobre líneas rectas sino integrales sobre planos. Dichas integrales sobre planos pueden ser calculadas a partir de proyecciones *parallel-beam* por medio de la integración sobre líneas rectas en la proyección (ver Figura 2-4). Dado que integrar sobre líneas rectas en una función bidimensional corresponde a obtener la transformada de Radon 2D, la transformada de Radon 3D se obtiene calculando las transformadas de Radon bidimensionales para todas y cada una de las proyecciones *parallel-beam* (Figuras 2.5(b) y 2.5(c)). Al ubicar en el espacio de Radon 3D las integrales sobre planos por su respectivo *punto característico*<sup>3</sup>, los datos de Radon asociados a cada proyección quedarán ubicados sobre un plano meridional en el espacio de Radon (Figura 2.5(d)).

Al integrar sobre una línea recta en una proyección *cone-beam*, se obtiene una integral de plano en la que los puntos más cercanos a la fuente de radiación tienen un peso mayor que los más lejanos, dado que reciben y absorben una mayor densidad de rayos (Figura 2-6). Con lo cual se deduce que no se puede calcular directamente la transformada de Radon de un objeto a partir de sus proyecciones *cone-beam*, punto en el que se profundizará en la sección 2.3.2.

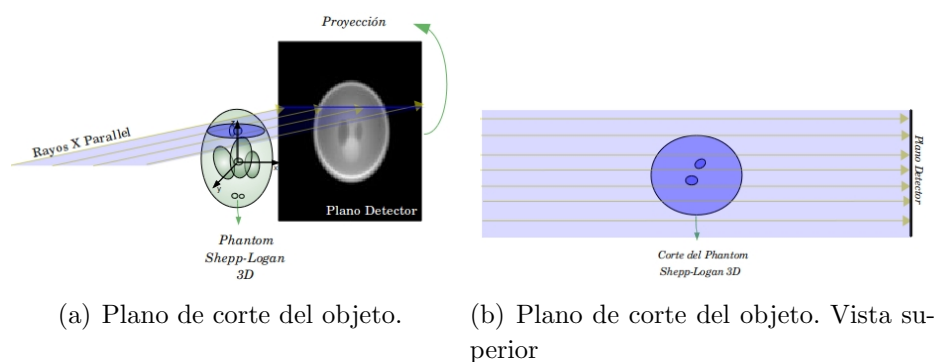
## 2.2. Reconstrucción

En esta sección se analizarán diferentes formas de implementar la inversión de la transformada de Radon, es decir, reconstruir una función a partir de sus datos de Radon. Nos

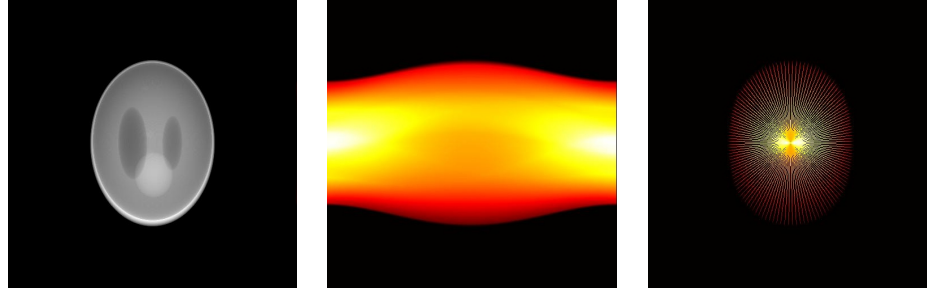
<sup>3</sup>Al igual que para las líneas rectas, el *punto característico* de un plano es el punto más cercano al origen coordenado. Su posición también representa tanto la orientación del plano como su distancia al origen.



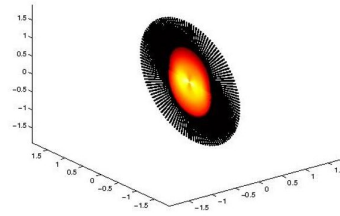
**Figura 2-3.:** Ubicación de los datos de Radon. Los puntos azules claros representan los puntos característicos de las trayectorias en línea recta de los rayos. Estos quedan mapeados en la misma posición en los sinogramas en coordenadas polares.



**Figura 2-4.:** Cálculo de integrales de plano a partir de una proyección *parallel-beam* con una proyección bidimensional.

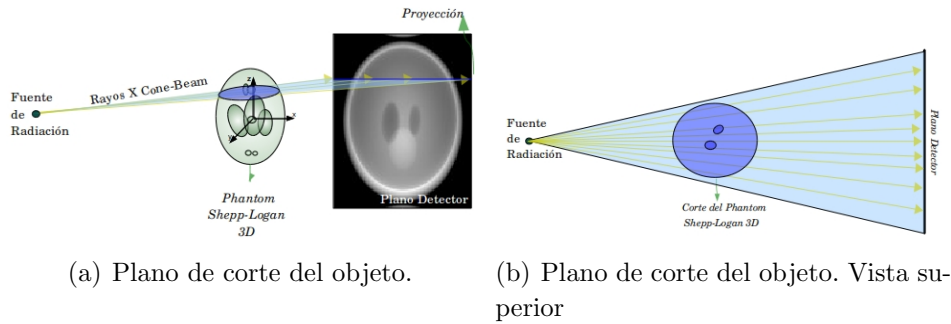


(a) Proyección *parallel-beam* para  $\phi = 90^0$  (b) Sinograma de la proyección. (c) Sinograma en coordenadas polares.



(d) Ubicación en el espacio de Radon 3D.

**Figura 2-5.:** Cálculo de la transformada de Radon 3D a partir de una proyección *parallel-beam*, caso tridimensional.



(a) Plano de corte del objeto.

(b) Plano de corte del objeto. Vista superior

**Figura 2-6.:** Representación gráfica de la integral sobre una línea recta en una proyección *cone-beam*.

referiremos explícitamente a la reconstrucción directa de Fourier y a la retroproyección.

### 2.2.1. Reconstrucción directa de Fourier

Con el fin de entender cómo se puede reconstruir una función a partir de su transformada de Radon por medio de la Transformada de Fourier, es necesario conocer el *Teorema del corte central*, el cual será explicado a continuación.

**Teorema del corte central** Es necesario, antes de explicar el teorema del corte central, definir la transformada de Fourier. Comenzando por su versión unidimensional, está dada de la siguiente forma:

$$\mathcal{F}\{g(x)\}(\omega) = G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-j\omega x} g(x) dx \quad (2-2)$$

Donde  $g$  es una función definida en los reales y  $\omega$  representa la variable frecuencial. La fórmula general para la transformada de Fourier definida en un espacio  $n$ -dimensional es:

$$\mathcal{F}_n\{f(\vec{r})\}(\vec{v}) = F(\vec{v}) = (2\pi)^{-\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} e^{-j\vec{v} \cdot \vec{r}} f(\vec{r}) d\vec{r} \quad (2-3)$$

donde ahora  $f$  está definida en  $\mathbb{R}^n$ ,  $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$  y  $\vec{v} \in \mathbb{R}^n$  corresponde a la variable frecuencial en un espacio  $n$ -dimensional.

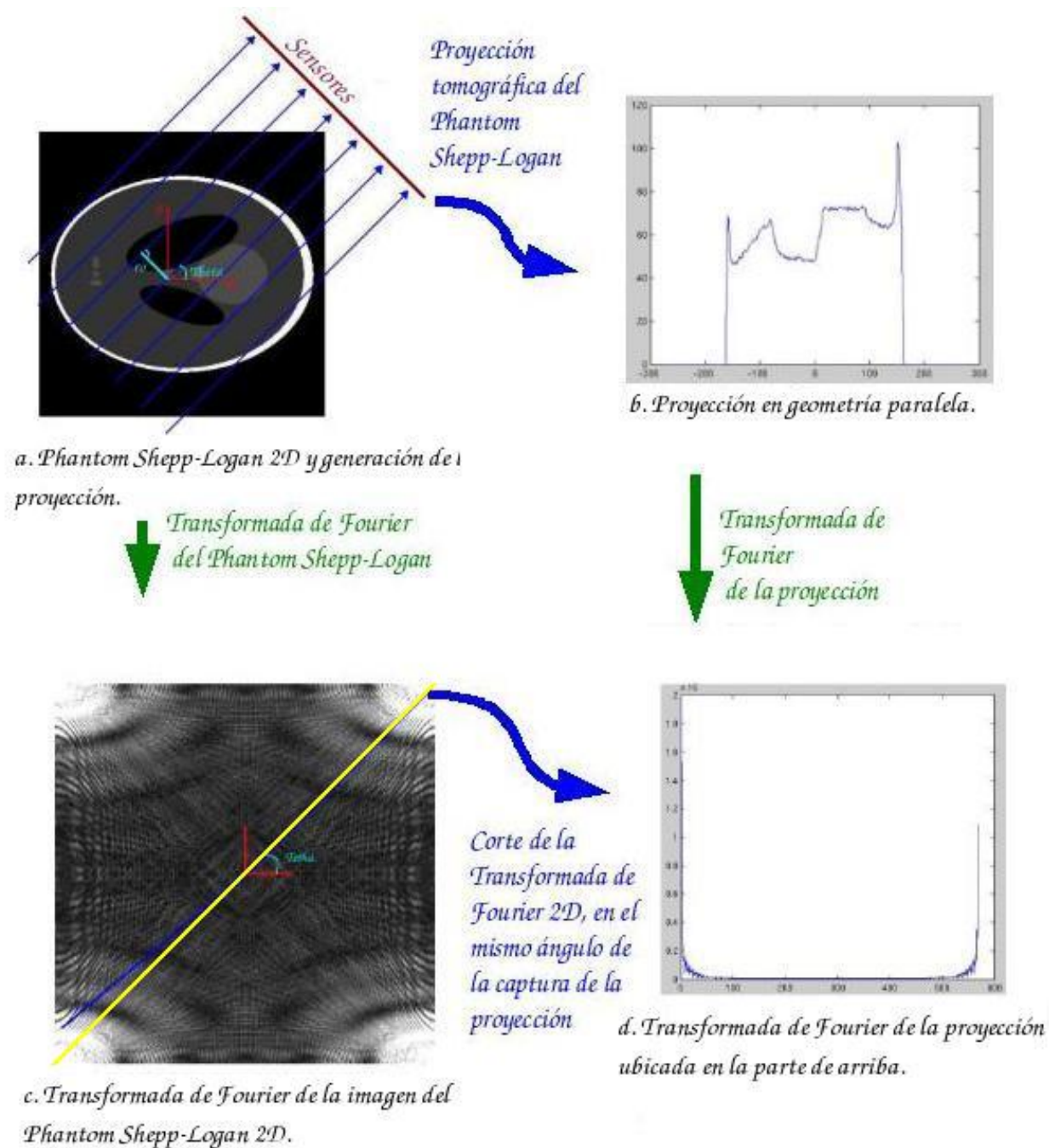
El *Teorema del Corte Central* es

$$\mathcal{F}\{Rf(s, \vec{n})\}(\omega) = \mathcal{F}_n\{f(\vec{r})\}(\omega \vec{n}) \quad (2-4)$$

es decir, la Transformada de Fourier de una función  $n$ -dimensional es igual a la transformada 1D de Fourier aplicada sobre todos los datos de Radon calculados para una misma dirección  $\vec{n}$ , siempre que la transformada  $n$ -dimensional de Fourier tenga esa misma dirección (Figura 2-7).

Para la tomografía de reconstrucción por cortes, los datos de Radon asociados a la misma dirección  $\vec{n}$ , corresponden a una proyección en geometría *parallel-beam*. El *Teorema del Corte Central* permite inferir que, a partir de dichas proyecciones, se puede hallar la transformada bidimensional de Fourier, y así, es factible reconstruir el corte irradiado con la transformada inversa bidimensional de Fourier.

Cada proyección *parallel-beam* mapea una recta que pasa por el origen de coordenadas en el plano de Fourier. Los datos de la transformada bidimensional de Fourier del corte quedan localizados entonces sobre una grilla polar. Dada la naturaleza discreta de la adquisición de



**Figura 2-7.:** Esquemático del Teorema del corte central

las proyecciones, es decir, que no se cuenta con un número infinito de proyecciones, habrá una menor densidad de muestras de la transformada de Fourier en las altas frecuencias. Para invertir la transformada de Fourier es necesario contar con los datos en una grilla rectangular, lo cual requiere de un proceso adicional de interpolación cuyos errores serán mayores para las frecuencias altas.

### 2.2.2. Retroproyección

Otra manera de reconstruir a partir de los datos de la transformada de Radon es con el operador de retroproyección (*backprojection*), escrito matemáticamente de la siguiente manera:

$$(R^*g)(\vec{r}) = \int_{S^{n-1}} g(\vec{r} \cdot \vec{n}, \vec{n}) d\vec{n} \quad (2-5)$$

donde  $S^{n-1}$  es la hiperesfera unitaria<sup>4</sup>. En esencia, la retroproyección asigna a cada uno de los puntos en el espacio  $\mathbb{R}^n$  la suma de las integrales de todos los hiperplanos que lo contienen. Teniendo  $g = Rf$ , la versión de  $f$  retroproyectada a partir de su transformada de Radon es:

$$f_{BP}(\vec{r}) = (R^*Rf) = \int_{S^{n-1}} Rf(\vec{r} \cdot \vec{n}, \vec{n}) d\vec{n} \quad (2-6)$$

para  $\vec{r} \in \mathbb{R}^2$ , la retroproyección de  $f$  es

$$f_{BP}(x, y) = \int_0^{2\pi} Rf(x \cos(\theta) + y \sin(\theta), \theta) d\theta \quad (2-7)$$

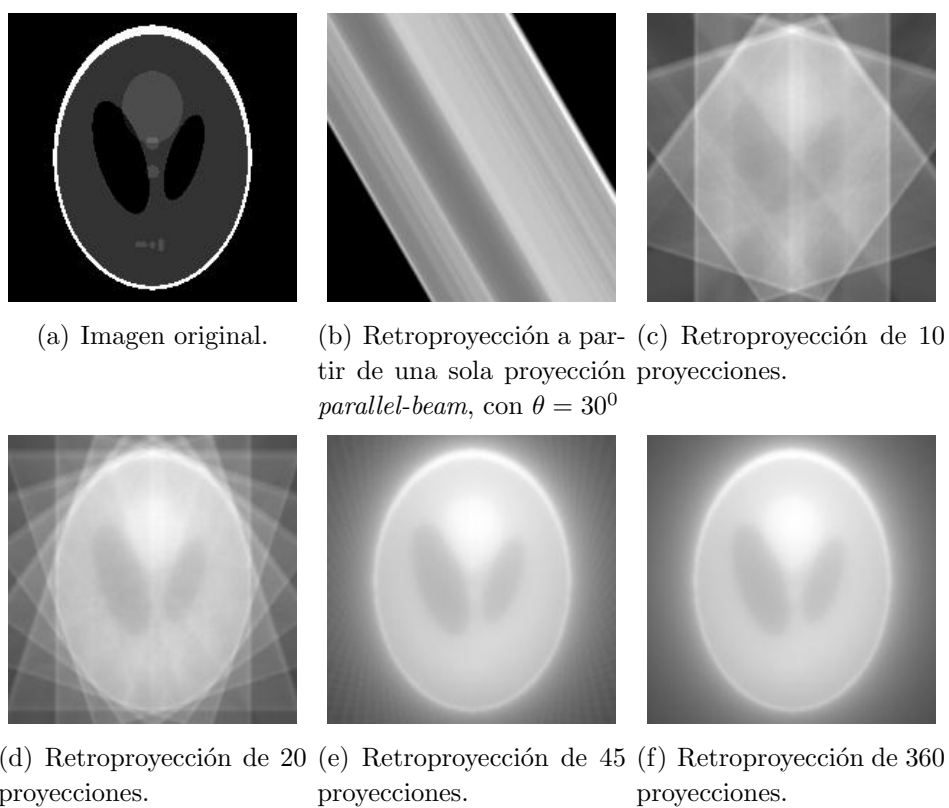
cuya explicación es la misma que para el caso *n-dimensional*: a cada punto en  $\mathbb{R}^2$  se le asigna la suma de las integrales de todas las rectas que pasan por él. Su implementación es bastante sencilla, en la medida que únicamente se repiten los valores de las proyecciones a lo largo de la línea recta sobre la que se integró, y se van sumando estos valores sucesivamente por cada ángulo de inclinación. De aquí el nombre de *retroproyección*.

El operador de retroproyección por sí solo no reconstruye perfectamente la función, sino que genera una versión difuminada (*blurred*) de la misma (ver Figura 2-8). Este fenómeno se debe a que la función retroproyectada, con respecto a la función original, corresponde a:

$$f_{BP}(x, y) = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \star \star f(x, y) \quad (2-8)$$

<sup>4</sup>La *hiperesfera unitaria* para el espacio  $\mathbb{R}^n$  la componen todos los  $\vec{r} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\|\vec{r}\|_2 = 1$ .





**Figura 2-8.:** Reconstrucción únicamente con la retroproyección.

donde  $\star\star$  representa el operador bidimensional de convolución.

Para corregir este artefacto en la retroproyección, existen dos alternativas principales: el filtrado de la función retroproyectada (*Backprojection-Filtered*) y la retroproyección de las proyecciones filtradas (*Filter-Backprojection*). A continuación, se profundizará más en estas dos alternativas.

**Filtrado de la retroproyección (Backprojection-Filtered, BPF)** Al aplicar la transformada bidimensional de Fourier a la función descrita en la Ecuación 2-7, se obtiene

$$F_{BP}(u, v) = \frac{1}{\sqrt{u^2 + v^2}} F(u, v) \quad (2-9)$$

donde  $F_{BP} = \mathcal{F}\{f_{BP}\}$  y  $F = \mathcal{F}\{f\}$ . Desde esta perspectiva, corregir el difuminado de la función retroproyectada equivale a aplicar sobre la transformada de Fourier de la retroproyección un filtro rampa, asociado a la siguiente fórmula:

$$F(u, v) = F_{BP}(u, v) \sqrt{u^2 + v^2} \quad (2-10)$$

es decir, una vez calculada la función retroproyectada, se debe calcular su transformada de Fourier, realizar el filtrado con la Ecuación 2-10 e invertir la transformada de Fourier para obtener, de esta manera, la función original. Expresado matemáticamente, esto es

$$f = \mathcal{F}_2^{-1}\{|k| \mathcal{F}_2\{R^* R f\}\} \quad (2-11)$$

donde  $\mathcal{F}_2$  representa la transformada bidimensional de Fourier,  $\mathcal{F}_2^{-1}$  su inversa y  $|k| = \sqrt{u^2 + v^2}$  la distancia radial en el espacio de Fourier 2D. Una forma más rápida de hacer esta retroproyección filtrada, evitando calcular las transformadas directa e inversa de Fourier 2D, consiste en encontrar una función  $h$  tal que

$$f = \mathcal{F}_2^{-1}\{|k| \mathcal{F}_2\{R^* R f\}\} = h \star\star R^* R f \quad (2-12)$$

lo que implica que, por la propiedad de la convolución de la transformada de Fourier,  $h = \mathcal{F}_2\{|k|\}$ .

**Retroproyección de las proyecciones filtradas (Filter-Backprojection, FBP)** Por otro lado, dado que el filtro que se aplica a la función retroproyectada es simétrico con respecto al origen de coordenadas, es decir, considera únicamente la distancia radial en el espacio de Fourier 2D (Ecuación 2-11); dicho filtro puede ser igualmente implementado sobre los datos de cada proyección *parallel-beam*, dada la correspondencia que existe entre cada una

de estas proyecciones y la transformada 2D de Fourier de la imagen reconstruida<sup>5</sup>. Esto, escrito matemáticamente, es

$$f = R^* \{ \mathcal{F}^{-1} \{ |\omega| \mathcal{F} \{ Rf \} \} \} \quad (2-13)$$

donde

$$\mathcal{F} \{ Rf \} (\omega, \theta) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-j\omega s} Rf(s, \theta) ds \quad (2-14)$$

Al igual que para la Ecuación 2-11, es posible expresar la operación  $\mathcal{F}^{-1} \{ |\omega| \mathcal{F} \{ Rf \} \}$  como la convolución de dos funciones. Es decir, encontrar una función  $h$  tal que  $h = \mathcal{F}^{-1} \{ |\omega| \}$ , para que la Ecuación 2-13 quede finalmente de la siguiente forma:

$$f = R^* \{ h \star Rf \} \quad (2-15)$$

donde  $\star$  es el operador unidimensional de convolución, y

$$h(s) \star Rf(s, \theta) = \int_{\mathbb{R}} h(s-t) Rf(t, \theta) dt \quad (2-16)$$

## 2.3. Tomografía cone-beam

Para la geometría *Cone-Beam*, los rayos se originan en el mismo punto, los cuales se proyectan sobre el objeto en forma de cono (ver Figura 2-9).

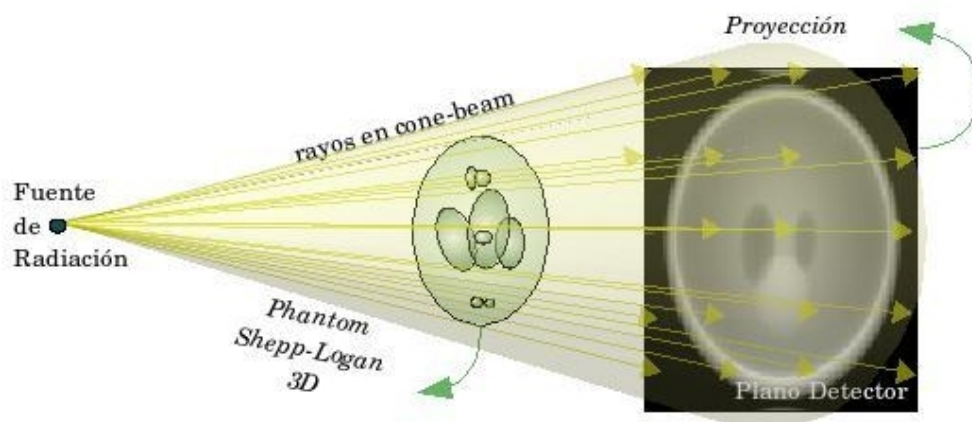
**Transformada Cone-Beam** Matemáticamente, se definirá la transformada *cone-beam* de la siguiente forma

$$Xf(a, \vec{n}) = \int_{\mathbb{R}^+} f(a + r\vec{n}) dr \quad (2-17)$$

donde  $a \in \mathbb{R}^n$  y  $\vec{n} \in S^{n-1}$ ;  $a$  corresponde a las coordenadas de la posición de la fuente de radiación y  $\vec{n}$  representa la dirección del rayo. Es decir, la transformada *cone-beam* está compuesta por las integrales de línea que van desde la posición  $a$  en dirección de  $\vec{n}$  hasta el detector.

---

<sup>5</sup>Esto se deduce del Teorema del Corte Central, Sección 2.2.1.



**Figura 2-9.:** Captura de una proyección tomográfica con la geometría *cone-beam*

### 2.3.1. Condición de suficiencia

En la práctica, las proyecciones *cone-beam* son adquiridas siguiendo una trayectoria  $\gamma$ , tanto para la fuente de radiación como para los fotosensores. Es decir, en la práctica la Ecuación 2-17 está condicionada a que  $a \in \gamma$ . A partir de esto surge la siguiente pregunta: ¿cuál es la mejor trayectoria de adquisición de las proyecciones *cone-beam*? Este interrogante fue resuelto por Smith [43], de cuyo trabajo se extrae la siguiente *condición de suficiencia*: *para lograr una reconstrucción perfecta del interior de un objeto a partir de un conjunto de proyecciones tomográficas cone-beam es necesario que la trayectoria con la cual dichas proyecciones sean adquiridas intersecte, al menos una vez, a todos los planos que tocan el objeto*. Esta condición no se cumple para un  $\gamma$  circular, la cual es la trayectoria más común en los escaneres que utilizan la geometría *Cone-Beam*.

### 2.3.2. Reconstrucción

Ahora bien, los métodos de reconstrucción tomográfica se dividen, de manera general, en métodos iterativos y métodos analíticos. En esencia, en los métodos iterativos la función a reconstruir se calcula en sucesivas iteraciones buscando llegar a la función que mejor corresponda con las proyecciones capturadas. Como método de reconstrucción analítica para geometría *Cone-Beam* se encuentra el propuesto por Feldkamp *et al.* [15] y la reconstrucción a partir de la transformada de Radon del objeto, usando la relación de Grangeat [16].

**Algoritmo FDK (Feldkamp, Davis y Kress)** Este algoritmo fue propuesto en 1984 por Feldkamp, Davis y Kress [15], y corresponde a la extensión tridimensional de un algoritmo de retroproyección filtrada para proyecciones *fan-beam*. La imagen se reconstruye utilizando una retroproyección *cone-beam*, es decir, los valores de intensidad registrados en las proyecciones

*cone-beam* son replicados a lo largo de las trayectorias de los rayos y sumados unos sobre otros. En este caso, se retroproyectan proyecciones *cone-beam* previamente filtradas para corregir el artefacto de *blur* generado con todas las retroproyecciones puras. Este proceso tiene las siguiente ventajas:

- La reconstrucción es exacta en el plano que contiene la trayectoria de la fuente de radiación.
- La reconstrucción es exacta para todo objeto que sea invariante a desplazamientos en dirección del eje de rotación de la fuente de radiación.
- La integral de línea correspondiente a toda línea ortogonal al plano de la órbita coincide con la verdadera integral de línea del objeto.

Si bien este método es bastante utilizado debido a que es rápido dado que su complejidad computacional no es muy alta, constituye un método de reconstrucción aproximada, dado que la trayectoria de la fuente de radiación no cumple la condición de suficiencia de Smith.

**Reconstrucción usando la relación de Grangeat** Este método busca hacer una inversión analítica de la transformada *cone-beam* calculando la derivada de la transformada de Radon a partir de las proyecciones *cone-beam* (la derivación original se encuentra en [16]). Igualmente, una interpretación matemática sencilla, intuitiva y general se encuentra en el *Teorema 2.19* de Natterer[32]. Aquí se usará una formulación de la misma relación de Grangeat, desarrollada en el Apéndice A:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha} \int_{\alpha^p} X f(a, \vec{n}) d\vec{n} = \left. \frac{\partial R f(s, \vec{n})}{\partial s} \right|_{s=a \cdot \vec{n}} \quad (2-18)$$

donde  $\alpha \in S^2$  indica la dirección perpendicular al plano de integración y  $\alpha^p$  representa todas las direcciones perpendiculares a  $\alpha$ . Es decir, el dominio de integración agrupa todos los rayos que pasan por la fuente de radiación y están confinados dentro del plano perpendicular a  $\alpha$ . El diferencial  $\partial \alpha$  representa un cambio en la dirección del vector y no un cambio en su norma. El lado derecho de la Ecuación 2-18 hace referencia a la derivada de Radon en dirección radial. Es decir, la *razón de cambio* de la integral de plano de la función cuando el plano se *mueve* en dirección de  $\vec{n}$ .

Dado que la transformada 3D de Radon puede ser calculada directamente a partir de las proyecciones *parallel-beam*, la derivada de Radon puede entenderse gráficamente con la Figura 2.10(b). Esta Figura muestra dos planos paralelos (tienen un mismo vector normal  $\vec{n}$  señalado con la flecha roja corta) intersectando el objeto. Cada plano tiene asociado un dato de la Transformada de Radon del objeto, que puede ser calculado sumando los valores que se encuentran sobre las líneas rectas azul oscuro sobre la proyección *parallel-beam*. Estas líneas

constituyen la intersección entre cada plano de integración con el plano detector. La posición radial ( $s$ ) de cada plano varía en dirección de  $\vec{n}$ . La derivada de Radon  $\frac{\partial R}{\partial s}$  es la diferencia infinitesimal entre las integrales de ambos planos cuando están muy cerca el uno del otro. En el lado izquierdo de la Ecuación 2-18, la integral

$$\int_{\alpha^p} X f(a, \vec{n}) d\vec{n}$$

comprende la suma de todos los valores de integración de los rayos que están contenidos en un mismo plano espacial.

Esto puede verse en la Figura 2.10(a) donde, para cada plano  $\alpha^p$ , se integran las integrales de línea  $X f(a, \vec{n})$  asociadas a cada rayo. Esta integral se puede calcular de manera apropiada asociando a cada valor de intensidad en la proyección *cone-beam* un peso relacionado con la distancia a la fuente de radiación y sumando los valores que se encuentran sobre la línea de intersección con el plano detector.

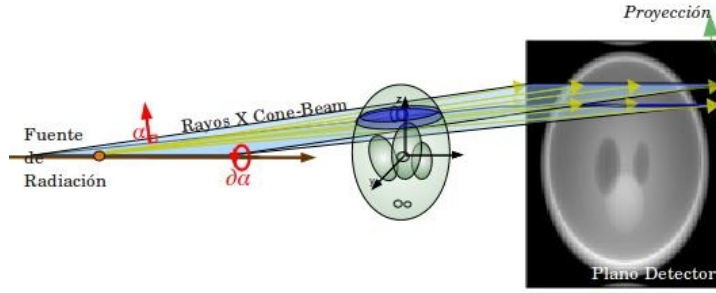
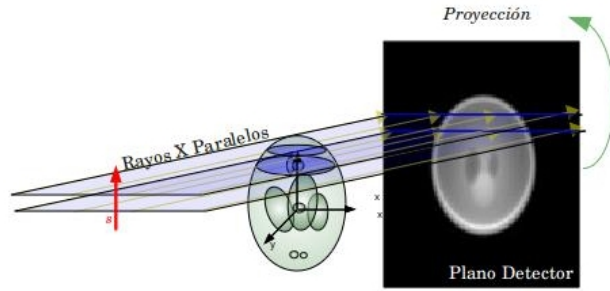
Finalmente, la derivada parcial que antecede a la integral hace referencia al cambio de dirección de  $\alpha$ , dado que está sujeto a la condición de mantener su norma. Este cambio de dirección está relacionado con un nuevo plano de integración. Cada uno de estos planos interseca el plano detector en una línea recta diferente (líneas azul oscuro en la Figura 2.10(a)), de forma tal que, si el cambio de dirección de  $\alpha$  es perpendicular al plano de integración, las líneas en el plano detector serán paralelas. Cuando el cambio de  $\alpha$  es suficientemente pequeño, los planos están muy cerca entre sí. La diferencia infinitesimal de las integrales de los planos corresponden entonces al mismo valor de la derivada de Radon.

## 2.4. Los datos en el método de reconstrucción analítico basado en Grangeat

Una vez la relación de Grangeat provee una herramienta matemática para la reconstrucción analítica del objeto a partir de sus proyecciones *cone-beam*, es necesario precisar cuál es el manejo que deben tener estos datos, cómo se ubican en el espacio de Radon 3D y, para una trayectoria circular de la fuente de radiación, cual es el efecto del incumplimiento de la condición de suficiencia de Smith.

### 2.4.1. Ubicación en el espacio de Radon 3D

Dada la relación de Grangeat, a partir de cada proyección *cone-beam* se puede calcular la derivada de la transformada de Radon asociada a los planos que contienen la posición de la fuente de radiación. Cada uno de estos datos queda distribuido en el espacio tridimensional de Radon en la posición del *punto característico* de cada plano. Las coordenadas de este punto representan la información de orientación y posición del plano dado que el vector que va del origen a este punto es normal al plano, indicando su orientación, y la magnitud de

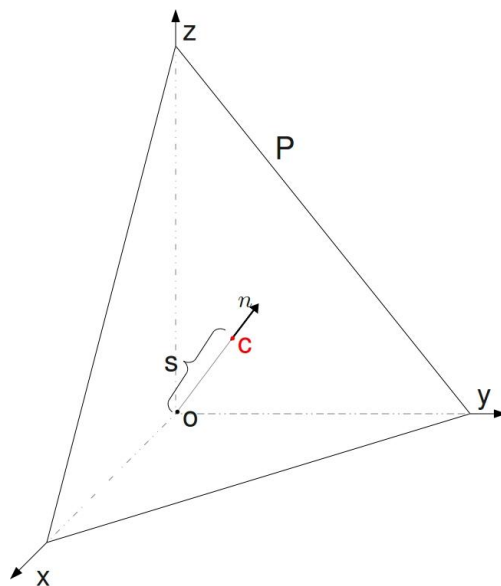
(a) Relación de Grangeat vista desde la proyección *cone-beam*(b) Relación de Grangeat vista desde la proyección *parallel-beam***Figura 2-10.:** Representación geométrica de la relación de Grangeat

este vector representa la posición del plano. Esto se ilustra gráficamente en la Figura 2-11 así: el punto característico del plano  $P$  se muestra sobre el plano en color rojo con la letra  $C$ . El vector  $\vec{n} = \frac{\vec{OC}}{\|\vec{OC}\|}$  es normal al plano  $P$ , y la distancia de  $O$  a  $C$  es la misma distancia de  $O$  a  $P$ .

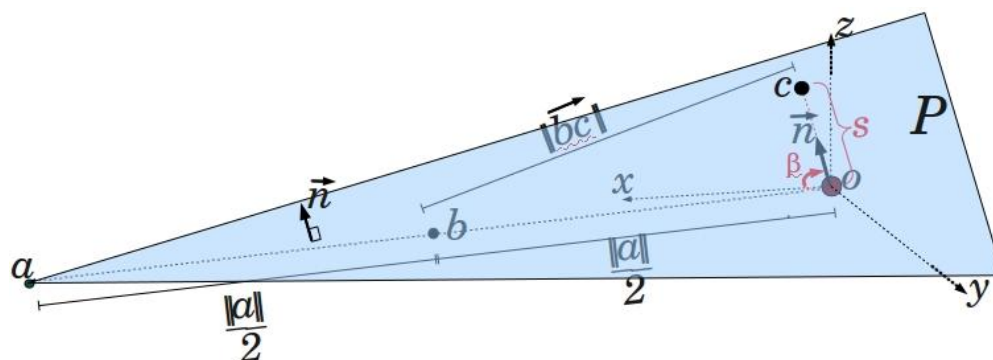
Dado que la relación de Grangeat permite calcular la derivada de la transformada de Radon asociada a los planos que cruzan la fuente de radiación, es importante analizar la distribución de los puntos característicos de todos los planos que pasan por un mismo punto, utilizando la Figura 2-12.

En esta gráfica, el origen de coordenadas está denotado con la letra  $O$ , la letra  $a$  representa la posición de la fuente de radiación. El punto  $b$  representa el punto medio entre  $O$  y  $a$ .  $P$  es el plano, cuyo segmento está representado por el triángulo azul claro,  $c$  es el punto característico de  $P$  y, por ende, el punto de  $P$  más cercano a  $O$ . El vector  $\vec{n}$  es el vector unitario normal a  $P$ , el cual tiene la misma dirección del vector  $\vec{oc}$ , es decir,  $\vec{n} = \frac{\vec{oc}}{\|\vec{oc}\|}$   $s$  es la distancia de  $P$  a  $o$ , la cual equivale a  $s = \|\vec{oc}\| = (a \cdot \vec{n})$ .  $\beta$  es el ángulo formado entre los vectores  $\vec{n}$  y  $\vec{Ob}$ .

Usando el triángulo  $obc$  (resaltado en rojo en la Figura 2-13) y aplicando el *Teorema del Coseno*, se obtiene:

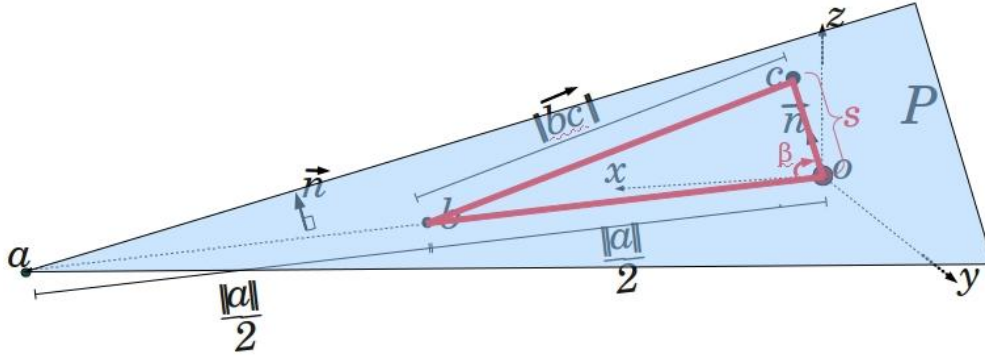


**Figura 2-11.:** Caracterización de un plano con las coordenadas de su punto característico.



**Figura 2-12.:** Parámetros geométricos para la caracterización de los planos que pasan por un mismo punto  $a$ .





**Figura 2-13.:** Parámetros geométricos para la caracterización de los planos que pasan por un mismo punto  $a$ . El triángulo  $obc$  está resaltado en rojo.

$$\begin{aligned}
 \|\vec{bc}\|^2 &= \|\vec{ob}\|^2 + \|\vec{oc}\|^2 - 2 \|\vec{ob}\| \|\vec{oc}\| \cos \beta \\
 &= \|\vec{ob}\|^2 + (\vec{oa} \cdot \vec{n})^2 - 2 \|\vec{ob}\| (\vec{a} \cdot \vec{n}) \frac{(\|\vec{ob}\| \cdot \vec{n})}{\|\vec{ob}\|} \\
 &= \|\vec{ob}\|^2 + (\vec{oa} \cdot \vec{n})^2 - 2 (\vec{oa} \cdot \vec{n}) \left( \frac{\vec{oa}}{2} \cdot \vec{n} \right) \\
 &= \|\vec{ob}\|^2 + (\vec{oa} \cdot \vec{n})^2 - (\vec{oa} \cdot \vec{n})^2 \\
 &= \|\vec{ob}\|^2
 \end{aligned}$$

Es decir, independientemente de la orientación  $\vec{n}$  del plano, el punto característico siempre estará contenido en una esfera de radio  $\|\vec{ob}\|$  con centro en  $b$  (Figura 2-14):

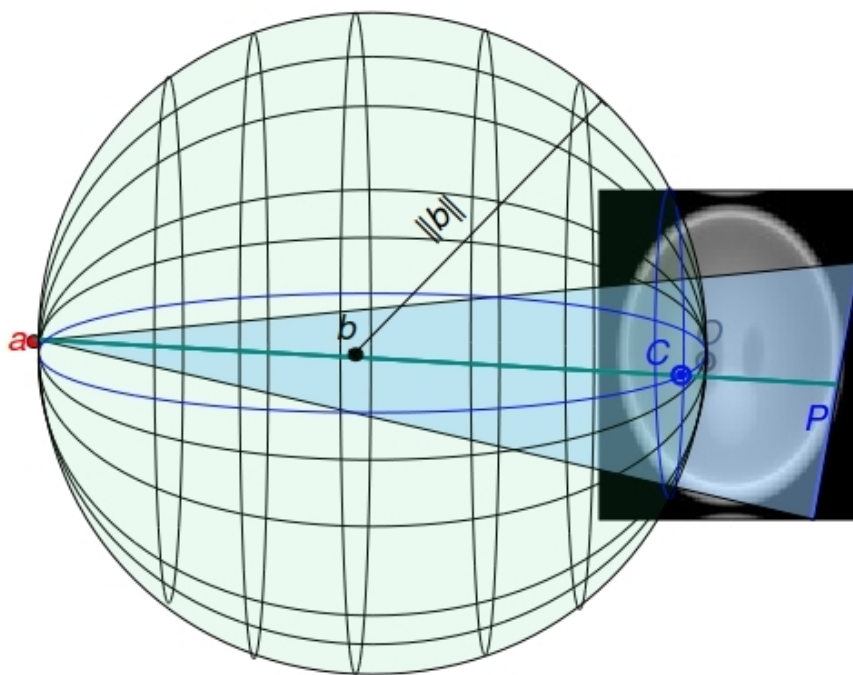
$$\|\vec{bx}\| = \|\vec{ob}\|; \quad b = \frac{a}{2}; \quad a, x \in \mathbb{R}^3 \quad (2-19)$$

Para cada posición de la fuente de radiación, es decir, para cada proyección *cone-beam*, se genera una esfera diferente en el espacio de Radon 3D (ver Figura 2-15).

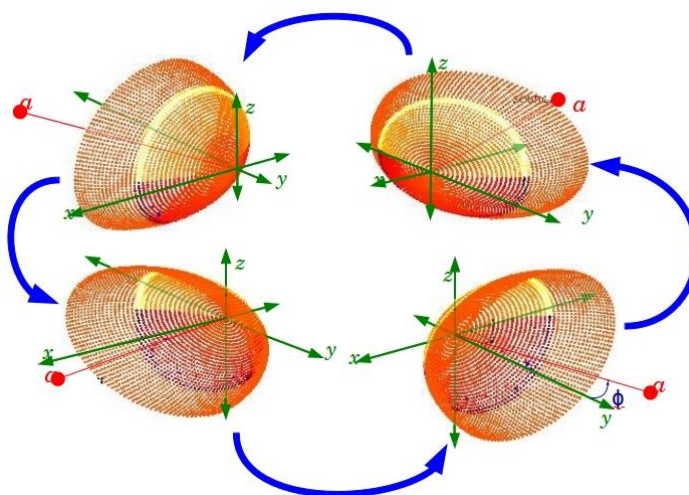
Cuando las proyecciones *cone-beam* son capturadas con la fuente de radiación siguiendo una trayectoria circular  $\gamma$ , expresada en la siguiente ecuación,

$$\gamma = r(\cos \phi, \sin \phi, 0)$$

las esferas de cada proyección *cone-beam* unidas forman un toroide en el espacio de Radon, conocido como *Radon shell*, como el que se muestra en la Figura 2-16. Este toroide tiene un espacio vacío (hueco) cerca al eje de rotación. Dicho hueco representa a todos los planos que no intersectan la trayectoria de la fuente de radiación y, por ende, no es posible calcular

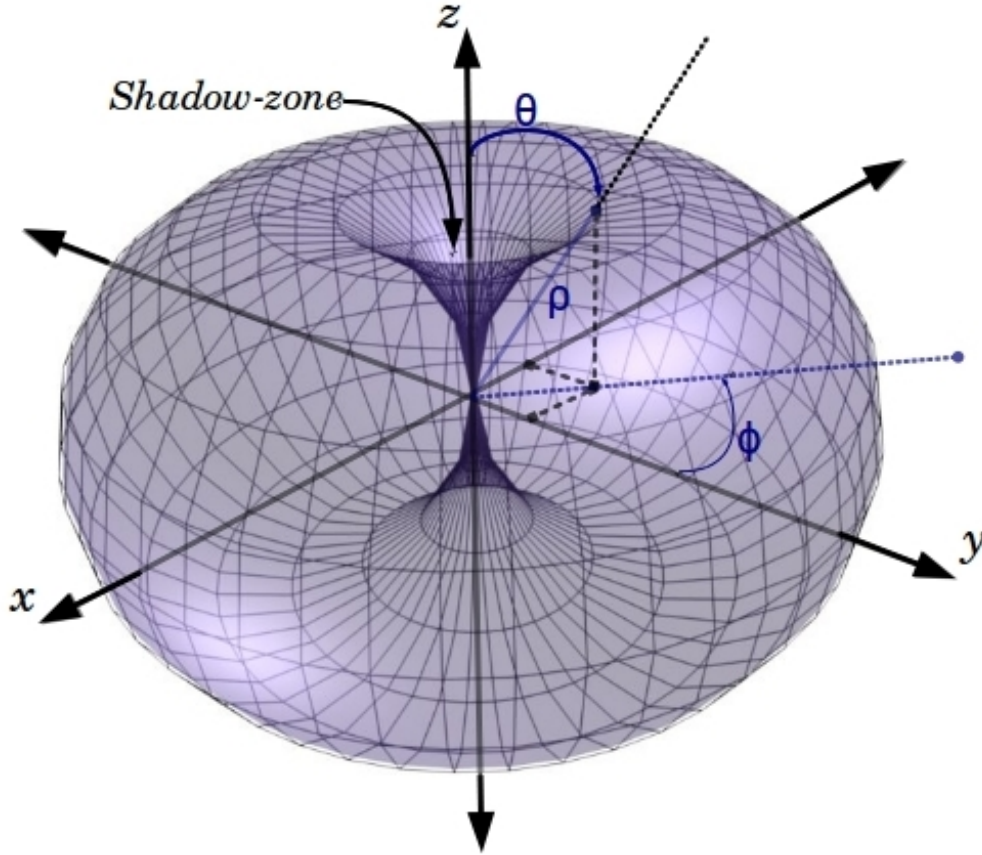


**Figura 2-14.:** Los puntos característicos de los planos que pasan por la posición de la fuente de radiación ( $a$ ) para una proyección *cone-beam* forman una esfera cuya superficie pasa por  $a$  y por el origen coordenado  $O$ , cuyo diámetro es la distancia entre estos dos puntos.



**Figura 2-15.:** Esferas en el espacio de Radon mapeadas por cuatro diferentes posiciones de la fuente de radiación. Estas posiciones siguen una trayectoria circular.

la derivada de la transformada de Radon asociada a estos planos. Estos datos desconocidos conforman una zona de sombra (*shadow-zone*). La carencia de estos datos refleja el hecho de que la trayectoria circular no cumple con la condición de suficiencia de Smith[43]. Para lograr una reconstrucción exacta, es necesario establecer una estrategia para estimar estos datos faltantes. Definir esta estrategia es el objetivo principal de este trabajo.



**Figura 2-16.:** Ubicación de los datos de la derivada de Radon calculados a partir de proyecciones *cone-beam* en trayectoria circular.

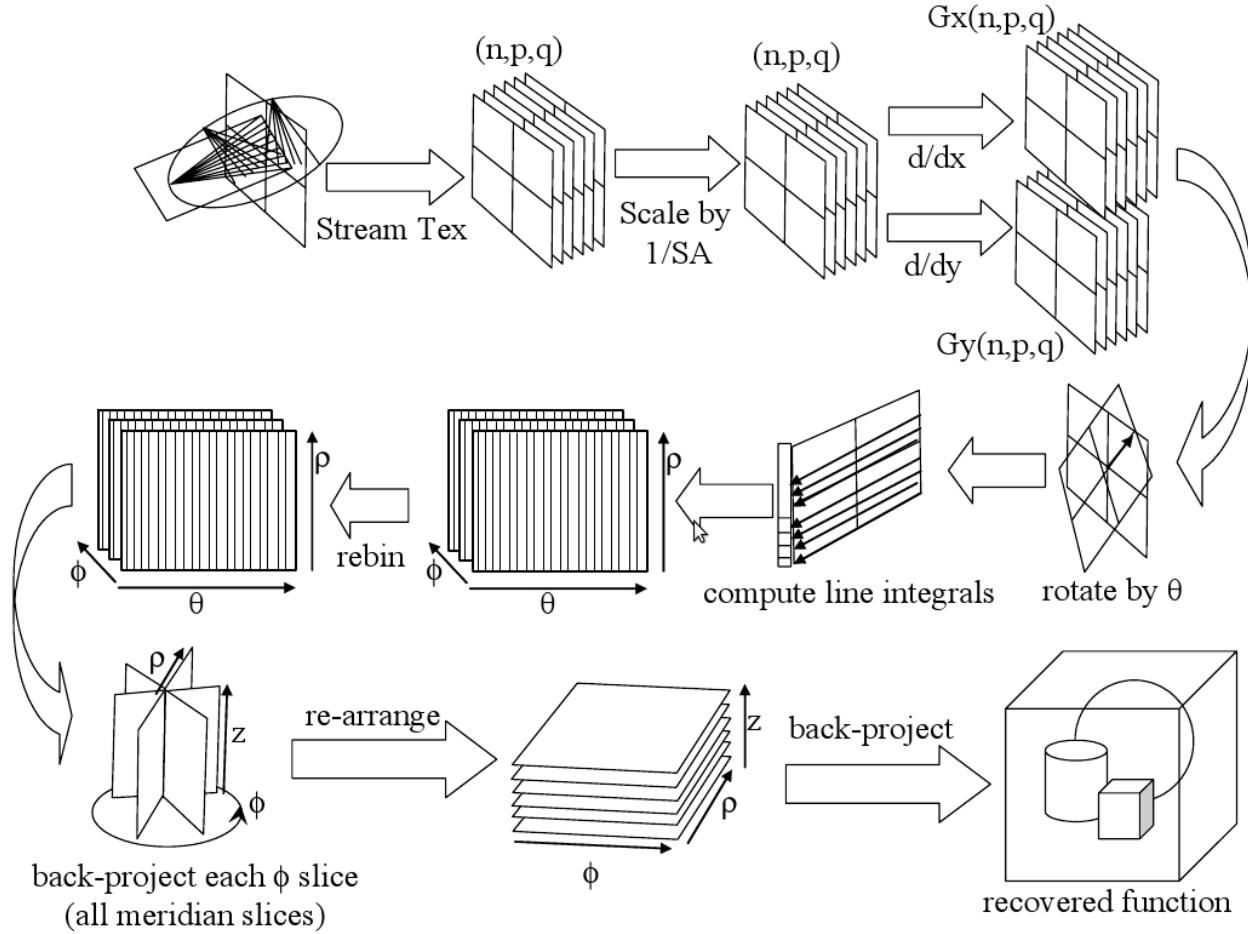
### 3. Trabajos relacionados

Si bien el problema de calcular los datos faltantes del *shadow-zone* se encuentra formulado desde la misma publicación de Grangeat en 1991, existen pocos trabajos que reporten aproximaciones al respecto. La literatura científica que hace referencia al tema se enfoca en la implementación de métodos genéricos de interpolación, mientras argumentan que éste sigue siendo un problema abierto.

En su artículo, Grangeat (ver sección 2.3.2) no plantea claramente las características de los valores con los que se debería rellenar el *shadow-zone*, sino que apela a la poca importancia que tienen estos datos en la fórmula analítica para la reconstrucción, dado que todos los valores de la derivada de la transformada de Radon son multiplicados por un factor igual al seno del ángulo que se forma con el eje  $z$ . Puesto que los datos del *shadow-zone* se encuentran tan cerca del eje de rotación, dicho ángulo es bastante pequeño, por lo que dichos valores pueden ser simplemente obviados o excluidos, lo que equivale a rellenar el *shadow-zone* con ceros. Este método es analíticamente correcto en el caso en que los datos faltantes se encuentren lo suficientemente cerca del eje de rotación, condición que se cumple cuando el ángulo del cono es pequeño. Este es el ángulo de apertura del cono de rayos que llegan al plano detector. En su artículo, Grangeat [16] presenta la formulación matemática para la reconstrucción, sin embargo la implementación práctica requiere un paso adicional de discretización en el que no se profundiza.

El problema del relleno del *shadow-zone* está referido en la literatura científica a la implementación de cualquier método de interpolación. En trabajos como el de Neophytou *et al.* [33], se menciona la implementación discreta de la reconstrucción *cone-beam* usando la relación de Grangeat, con el objetivo de optimizarla para su procesamiento en una GPU (*Graphics Processing Unit*). En esta implementación (ver Figura 3-1), primero se calcula la derivada de Radon sobre cada proyección *cone-beam*. A continuación, los datos se reagrupan (proceso nombrado *rebinning*), organizando los datos por planos meridionales comunes en el espacio de Radon. Una vez hecho esto, los datos son retroproyectados para obtener las proyecciones en rayos paralelos que corresponden a la dirección perpendicular de cada plano meridional. Finalmente, se realiza un nuevo reagrupamiento de los datos resultantes para conformar los sinogramas que se retroproyectan para obtener los cortes horizontales. El objeto reconstruido consiste en la apilación de estos cortes en una estructura tridimensional. En este tipo de implementaciones, los valores del *shadow-zone* no pueden ser simplemente ignorados con el mismo criterio usado por Grangeat. Sin embargo, en este trabajo no profundiza en la estimación de estos valores, se enfoca en la paralelización del algoritmo de

reconstrucción sin hacer especial énfasis en el relleno de los datos faltantes.



**Figura 3-1.:** Esquema general del proceso de reconstrucción usando el método de Grangeat. Tomado de [33]

Lee *et al.*[23] estudia el efecto de utilizar diferentes métodos para rellenar el *shadow-zone*. El objetivo principal de este trabajo es identificar y estudiar los diferentes artefactos que se generan en la reconstrucción tras utilizar una implementación discreta de la reconstrucción analítica dada por la relación de Grangeat. Tres tipos de artefactos son identificados en este trabajo: espina (*thorn*), arruga (*wrinkle*) y en forma de V (*V-shaped*). Cada uno de estos artefactos es producto del efecto de la discretización de las proyecciones y sus orientaciones en el cálculo de la derivada de Radon. En particular, el artefacto conocido como *thorn* es causado por el relleno erróneo del *shadow-zone*. Diferentes métodos de interpolación para calcular los datos faltantes del *shadow-zone* son aplicados con el fin de identificar el método que mejor reduce la presencia del artefacto (ver Figura 3-2). Los métodos para el relleno del *shadow-zone* considerados son: relleno con ceros, relleno horizontal constante (con el promedio de los datos existentes), interpolación lineal horizontal, interpolación cuadrática

horizontal, relleno vertical constante, interpolación lineal vertical y extrapolación cuadrática vertical. Si bien el artefacto se reduce cuando se aplican métodos de interpolación más sofisticados, como la interpolación/extrapolación cuadrática, ninguno de estos métodos tiene en cuenta las características propias de los datos a interpolar, como la correspondencia que deben tener estos datos con las proyecciones *parallel-beam*, o las condiciones matemáticas que deben cumplir dichos datos, ya que corresponden a la derivada de la transformada de Radon de un objeto. Posteriormente, Lee *et al.* [22] proponen un método de reconstrucción analítico para tomografía *cone-beam* en trayectoria de medio círculo<sup>1</sup> usando la relación de Grangeat, donde nuevamente el proceso de relleno del *shadow-zone* se realiza con métodos básicos como el llenado con ceros o la interpolación lineal horizontal.

Por lo que se deduce del material publicado aquí revisado, la estimación de los datos faltantes del *shadow-zone* suele resolverse con la aplicación de métodos genérico para la estimación de los datos faltantes en el *shadow-zone*. Si bien, dichos métodos logran reducir el artefacto generado por la ausencia de valores en el *shadow-zone*, un método de interpolación mejor adaptado al tipo de datos que se desea estimar debería reducir aún más el artefacto. En particular, no se identifica algún método que se ajuste a las características particulares del tipo de información que se desea estimar. De esta forma, se considera que la estimación de estos datos para la reconstrucción analítica de la tomografía *cone-beam* es un problema aún abierto.

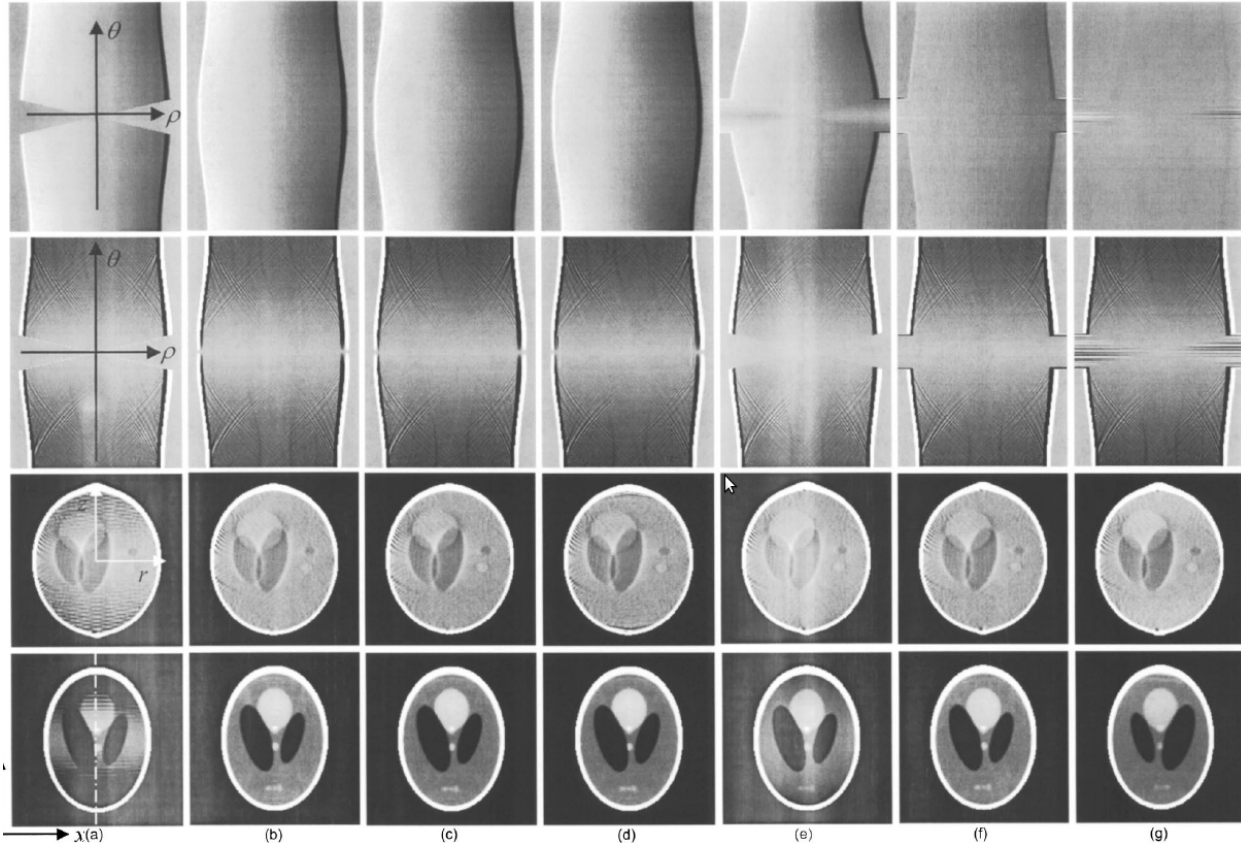
La ausencia de estos datos puede ser considerada también como un problema de estimación de muestras para una función de la que se sabe que tiene alguna característica particular en otro espacio. Puede entenderse que la teoría del *compressive sensing* (Candes *et al.*[9]), usa esta misma idea. En ella, se busca completar las muestras faltantes de una señal partiendo del conocimiento *apriori* referente a que la función es *sparse* en un dominio determinado<sup>2</sup>. De igual forma, es posible estimar los datos faltantes sabiendo de antemano que la función a reconstruir es, por ejemplo, suave con bordes en otro espacio. Esta idea es tratada con mayor profundidad por Egiazarian *et al.*[14], trabajo del cual se hablará a continuación.

En su trabajo, Egiazarian *et al.* establecen una metodología para estimar los datos faltantes buscando que la función resultante cumpla mejor las características que de ella se espera en el espacio. Esta idea es utilizada para completar datos faltantes del espacio de Fourier en problemas como aumentar la resolución de una imagen (ver Figura 3-6) y para mejorar la reconstrucción tomográfica bidimensional a partir de pocas proyecciones *parallel-beam* (ver Figuras 3-4 y 3-5). El esquema general de este método se ilustra en la Figura 3-3

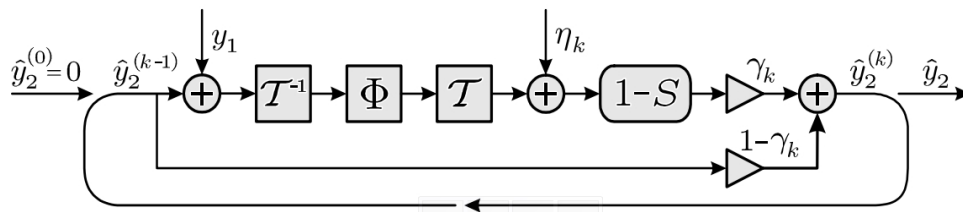
En este esquema, la regularización de la imagen está dada por un proceso iterativo de filtrado de los datos en el espacio donde éstos tienen un comportamiento regular. En la gráfica 3-3,  $\hat{y}_2$  representa los datos a estimar,  $\hat{y}_2^{(k)}$  la iteración  $k$ -ésima de estos valores y  $y_1$  los datos con los que se cuenta originalmente.

<sup>1</sup>Es decir, las respectivas proyecciones son adquiridas con solo 180° de giro alrededor del objeto.

<sup>2</sup>Es decir, en este dominio la función está compuesta principalmente de ceros y, por ende, toda su información se concentra en pocos coeficientes.



**Figura 3-2.:** Artefactos *thorn* con diferentes estrategias de relleno. (a) Relleno con ceros, (b) relleno constante horizontal, (e) interpolación lineal horizontal y (d) interpolación cuadrática horizontal. (e) Relleno constante vertical, (f) extrapolación lineal vertical, y (g) extrapolación cuadrática vertical. Primera fila: primera derivada en el plano meridional; Segunda fila: segunda derivada en el plano meridional; Tercera fila: imagen retroproyectada sobre el plano meridional; Cuarta fila: corte axial. Tomado de [23]



**Figura 3-3.:** Diagrama de flujo del trabajo de Egiazarian *et al.* Tomado de [14].

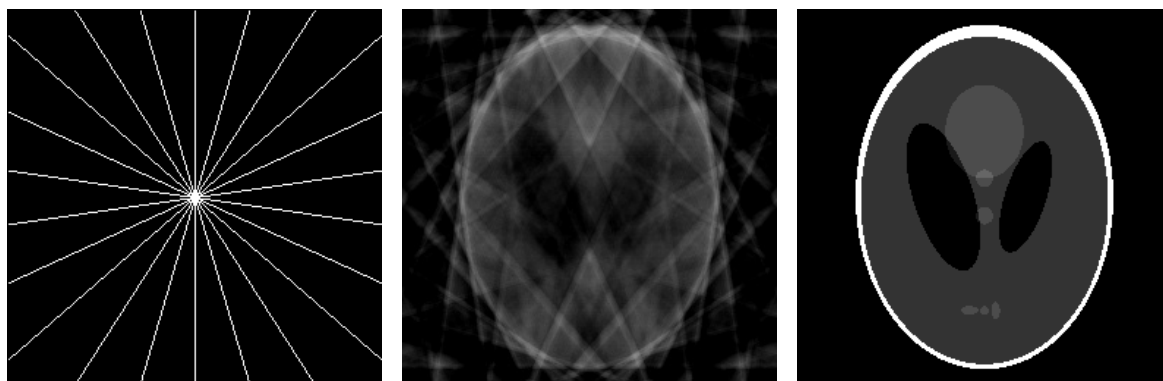
Cada iteración consta de las siguientes etapas:

- $T$ : En esta etapa se toman los datos en el espacio donde originalmente se encuentran incompletos y se llevan al espacio en el que se espera que correspondan a una función regular. En el trabajo de Egiazarian *et al.*, este es el espacio de Fourier y por ende  $T$  corresponde a la transformada inversa de Fourier.
- $\Phi$ : Esta etapa corresponde a la aplicación de un filtro adaptativo a los datos resultantes de la transformación  $T$ . El filtro escogido en el trabajo de Egiazarian es el *Block-Matching 3D*(BM3D), descrito en [12].
- $T^{-1}$ : Transformación inversa a la efectuada en  $T$ . Con esto, se regresa al espacio en donde los datos se encuentran originalmente incompletos.
- $\eta_k$ : Ruido gaussiano en la  $k$ -ésima iteración. Este ruido se suma a los datos estimados, y varía iteración a iteración convergiendo a cero. La idea de incorporar este ruido es evitar que la señal a la que converge el método iterativo corresponda a un mínimo local.
- **Convolución con  $1 - S$** : en esta etapa se eliminan los datos  $y_1$  para aislar  $y_2$ .  $S$  representa una máscara, la cual vale 1 para las posiciones de los valores con los que sí se cuenta, y 0 para los faltantes.
- **Promediado de los valores de la iteración anterior con el factor  $\gamma_k$** . Dicho factor  $\gamma_k$  es un valor entre 0 y 1, el cual representa los pesos del promedio ponderado entre dos iteraciones consecutivas.

El método estima los datos faltantes buscando que la función resultante cumpla con las características que de ella se esperan en el otro espacio. Esta regularización está dada por el filtrado iterativo. Dado que dicho filtrado podría converger a un mínimo local, se suma un ruido aleatorio a los datos estimados, el cual disminuye en intensidad a medida que avanzan las iteraciones. Los parámetros de generación del ruido  $\eta_k$ , al igual que el factor de promediado de los valores de iteraciones consecutivas  $\gamma_k$ , deben estimarse de acuerdo a la naturaleza de la función a reconstruir.

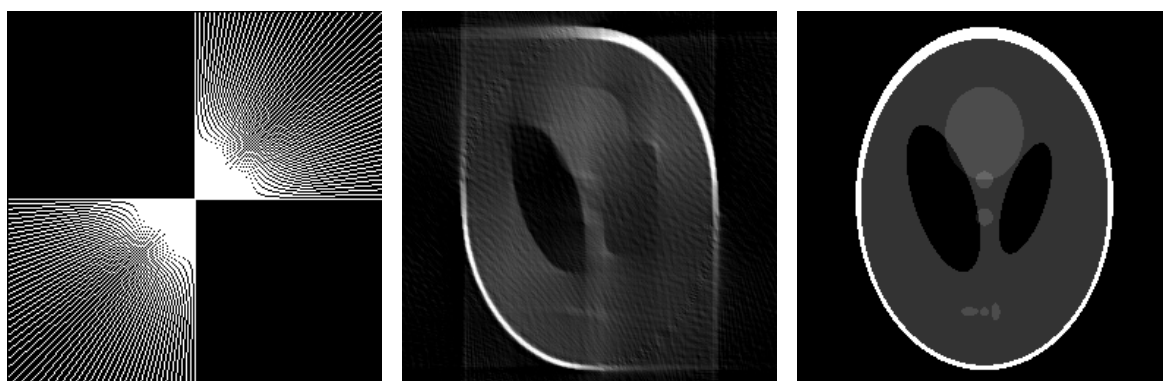
Este método muestra excelentes resultados para completar datos de Fourier en el problema de superresolución (Figura 3-6) y para el caso de reconstrucción tomográfica bidimensional *parallel-beam*, para datos sintéticos usando el phantom *Shepp-Logan* (Figuras 3-4 y 3-5). Sin embargo, no es posible aplicarlo de manera directa para completar los datos de la derivada de Radon en la reconstrucción de tomografía *cone-beam*, dado que para Fourier la incoherencia entre ambos espacios es máxima, mientras que no sucede lo mismo para la transformadas de Radon.





(a) Ubicación original de los datos en el espacio de Fourier. (b) Reconstrucción con los datos originales incompletos. (c) Reconstrucción después de estimar los datos faltantes.

**Figura 3-4.:** Aplicación del método de Egiazarian *et al.* a la reconstrucción CT *monoslice* con pocas proyecciones *parallel-beam*. Tomado de [14].



(a) Ubicación original de los datos en el espacio de Fourier. (b) Reconstrucción con los datos originales incompletos. (c) Reconstrucción después de estimar los datos faltantes.

**Figura 3-5.:** Aplicación del método de Egiazarian *et al.* a la reconstrucción CT *monoslice* con proyecciones de ángulo limitado. Tomado de [14].



(a) Ubicación original de los datos en el espacio de Fourier. (b) Reconstrucción con los datos originales incompletos. (c) Reconstrucción después de estimar los datos faltantes.

**Figura 3-6.:** Aplicación del método de Egiazarian *et al.* al problema de aumentar la resolución de una imagen. Tomado de [14].

## 4. Relleno del shadow-zone

Una vez identificados los datos a estimar y su naturaleza, en este capítulo se describirán las aproximaciones planteadas para organizar los datos conocidos y estimar los faltantes. La estrategia a seguir consiste en agrupar los datos con el fin de reducir la complejidad asociada a la interpolación tridimensional, dividiéndola en interpolaciones de menor dimensionalidad. De esta forma, se hizo una primera agrupación de los datos de acuerdo a las coordenadas  $s$  (radio) y  $\theta$  (colatitud), agrupaciones que sirven para ajustar la coordenada  $\phi$  y, por ende, interpolar los datos hacia planos meridionales comunes. Esta primera agrupación e interpolación se describe en la Sección 4.1.

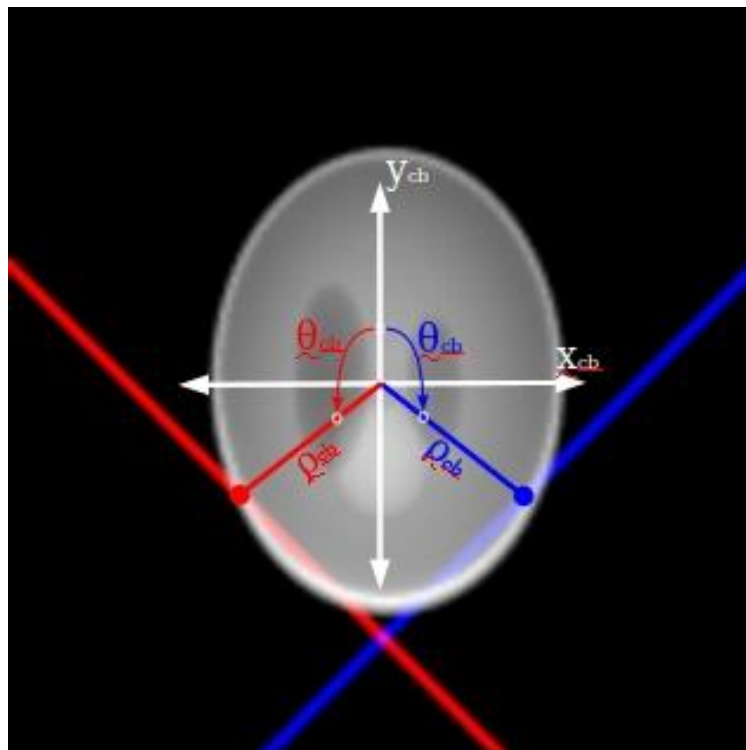
Una vez hecho esto, la interpolación y relleno del *shadow-zone* se realiza aplicando un método de estimación bidimensional sobre los planos meridionales usando la relación que existe entre estos y las proyecciones *parallel-beam* del objeto. Este método se presenta en la Sección 4.2.

### 4.1. Rebinning en dirección de $\phi$

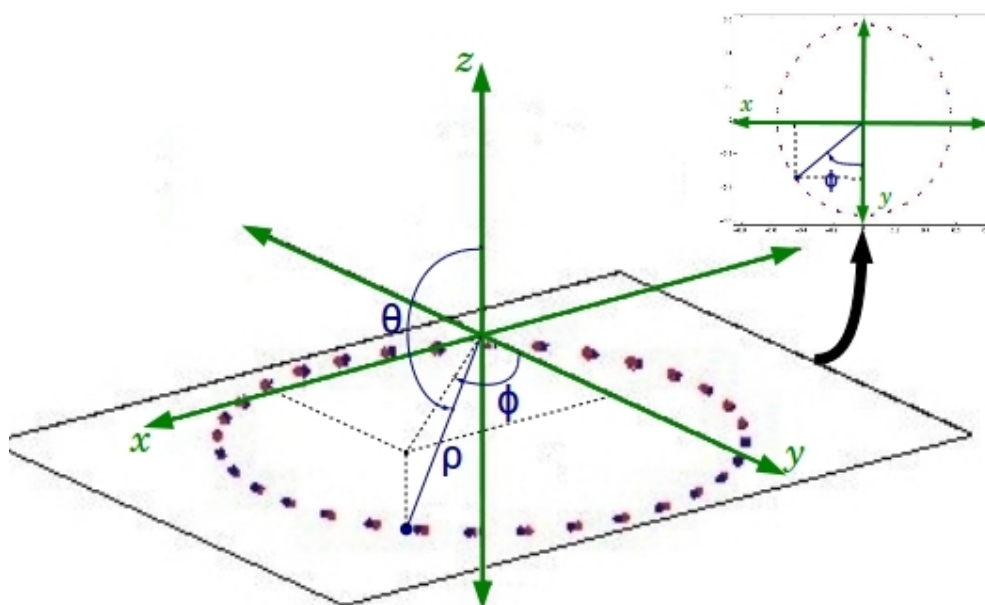
Para invertir la transformada de Radon es necesario que los datos se ubiquen en una grilla esférica regular en el espacio de Radon 3D. Haciendo un análisis de la distribución de los datos, se encontró que éstos se pueden agrupar de acuerdo a las coordenadas  $s$  y  $\theta$ , para luego interpolar en dirección de la coordenada  $\phi$ . Dicho agrupamiento se realiza teniendo en cuenta la siguiente observación: *los datos de la derivada de Radon correspondientes a las líneas rectas que tienen la misma orientación y posición en cada una de la proyecciones cone-beam, quedan ubicados en un círculo horizontal cuya mediatriz es el eje de rotación y que están uniformemente espaciados en el espacio de Radon 3D.*

Este concepto se presenta de manera gráfica en la Figura 4-1, la cual muestra una proyección *cone-beam* sobre la que se marcan dos líneas: una azul y una roja. En un sistema coordenado polar ubicado sobre el plano detector, los puntos característicos de estas líneas corresponden a  $(\rho_{cb}, \theta_{cb})$  y  $(\rho_{cb}, -\theta_{cb})$ .

Al ubicar los planos asociados a estas líneas en el espacio de Radon (ver Figura 4-2), estos planos compartirán las coordenadas esféricas  $\rho$  y  $\theta$ , y la coordenada  $\phi$  variará de acuerdo al ángulo de proyección  $\phi_s$ . Estos datos se encuentran distribuidos sobre un círculo horizontal cuya mediatriz es el eje  $z$ , el mismo que sirve como eje de rotación en la geometría de captura. Estos datos, dibujados como puntos rojos y azules de acuerdo a la posición con la que fueron calculados sobre la proyección *cone-beam* (Figura 4-1), quedan uniformemente distribuidos sobre la circunferencia.



**Figura 4-1.:** Proyección *cone-beam*.



**Figura 4-2.:** Ubicación sobre el espacio de Radon 3D para la derivada de Radon, calculada sobre las líneas rectas de la proyección *cone-beam* de la Figura 4-1.

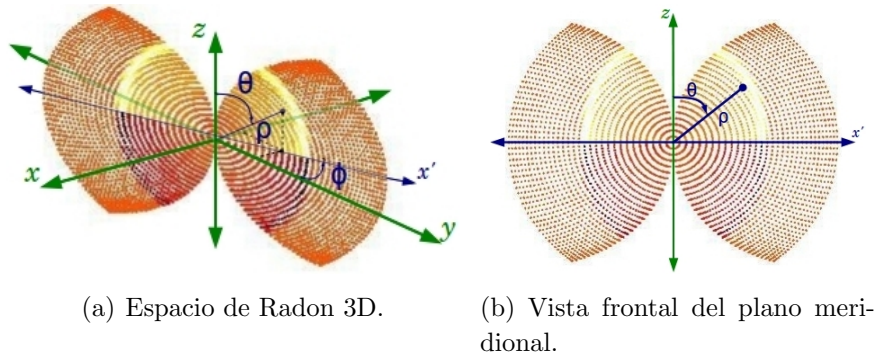
Este primer agrupamiento de los datos posibilita una primera interpolación unidimensional en dirección de la coordenada esférica que corresponde al ángulo de azimuth  $\phi$ . Los datos se encuentran distribuidos uniformemente a lo largo de una trayectoria cerrada, lo que implica que, en su conjunto, constituyen un grupo de muestras de una función periódica. La interpolación en dirección de  $\phi$  puede interpretarse como un remuestreo de la función periódica a algunas posiciones específicas de  $\phi$ . Asumiendo que dicha función es de banda limitada<sup>1</sup>, el cálculo de los valores de la función en el nuevo conjunto de posiciones de  $\phi$  se reduce a un simple desplazamiento de la función en el espacio de Fourier, de acuerdo a la siguiente ecuación:

$$\mathcal{F}\{f(\phi - \Delta\phi)\}(\omega) = e^{-i\omega\Delta\phi}\mathcal{F}\{f(\phi)\}(\omega) \quad (4-1)$$

donde  $\Delta\phi$  representa el cambio o *movimiento* que se debe aplicar en dirección de  $\phi$ . Esto es, calcular los valores de la función en las nuevas posiciones dadas por posiciones regulares previamente definidas para  $\phi$ .

Dado que se cuenta con dos conjuntos diferentes de datos (puntos azules y rojos) para calcular la misma interpolación, esta redundancia puede ser aprovechada para reducir los posibles errores de *aliasing*<sup>2</sup> asociados a la hipótesis de suavidad de la función. De esta forma, se aplica la Ecuación 4-1 para cada conjunto de datos por separado y luego se promedian ambos resultados.

Una vez hecha esta primera interpolación, los datos pueden agruparse ahora de acuerdo a la coordenada  $\phi$ , es decir, los datos que están en un mismo plano meridional en el espacio de Radon 3D (ver Figura 4-3).



**Figura 4-3.:** Agrupamiento de los datos después de la primera interpolación en dirección  $\phi$ .

A partir de este punto, la interpolación 3D hacia una grilla regular esférica se reduce al siguiente problema: *a partir un patrón de muestreo bidimensional (Figura 4.3(b)), estimar*

<sup>1</sup>Lo suficientemente suave como para estar completamente caracterizada por las muestras existentes, siguiendo el *Teorema de Shannon*.

<sup>2</sup>Error que se genera al momento de reconstruir una función cuya frecuencia máxima es mayor a la mitad de la frecuencia de muestreo.

los datos que corresponderían a una grilla polar. Esta parte de la interpolación incluye el relleno del *shadow-zone*, el cual corresponde al espacio ausente de datos de la Figura 4.3(b). Para lograr esta interpolación se puede seguir la misma estrategia aplicada hasta ahora, es decir, agrupar los datos en arreglos unidimensionales. Dicho agrupamiento puede realizarse en círculos concéntricos, ya que los datos se encuentran dispuestos de esta forma sobre los planos meridionales (Figura 4.3(b)). Una vez efectuado este agrupamiento, el método de interpolación debe estar encaminado a estimar muestras regularmente espaciadas de la función contenida en cada círculo. Esta estimación suele realizarse aplicando un método convencional de interpolación[23], aproximación que ignora la naturaleza misma de la función a la que corresponden estos datos. Otra posibilidad es caracterizar matemáticamente la función y estimar los datos regulares a partir del muestreo irregular asociado a cada círculo. Esta opción fue descartada por su complejidad y porque ignoraba la consistencia bidimensional de los datos ubicados sobre los planos meridionales.

Una estrategia diferente para la interpolación consiste en tomar los datos que se encuentran sobre los planos meridionales y luego aplicar algún método bidimensional de estimación de datos. Esta opción es la que finalmente se siguió en este trabajo, y se detalla en la siguiente sección.

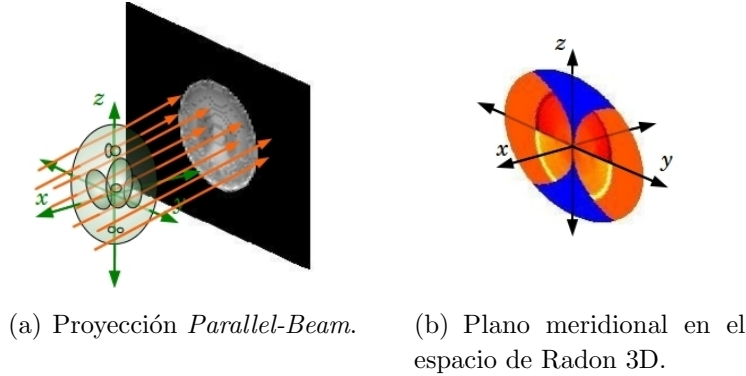
## 4.2. Relleno del *shadow-zone* por regularización de las proyecciones *parallel-beam*

Tal como se explicó en la Sección 2.1.1, los datos de la Transformada de Radon 3D ubicados sobre un plano polar<sup>3</sup> corresponden a la transformada bidimensional de Radon de una proyección *parallel-beam* (Figura 4-4). Esta propiedad será usada a continuación para estimar los valores faltantes del *shadow-zone* con el fin de que los datos resultantes correspondan a una proyección *parallel-beam* coherente.

Dado que una función regular de densidad 3D produciría proyecciones *parallel-beam* también regulares, esta regularidad podría ser explotada para estimar los datos faltantes del *shadow-zone*. Esta idea ha sido previamente utilizada por Egiazarian *et al.*[14] con el fin de completar datos faltantes en el espacio de Fourier (ver Capítulo 3). A diferencia del trabajo de Egiazarian *et al.*, el objetivo de este trabajo es completar datos en el espacio de la derivada de Radon y no en el espacio de Fourier. Esta diferencia podría significar un enfoque y un tratamiento matemático diferentes a los propuestos en el artículo de Egiazarian *et al.*.

La teoría de *compressive sensing*, de la cual el trabajo de Egiazarian *et al.* se presenta como una extensión, establece que debe existir una relación de *incoherencia* entre el espacio donde las muestras son incompletas y el espacio donde la función tiene un comportamiento *sparse* o, en este caso, regular. Esta incoherencia se ve reflejada en el hecho de que para una función de soporte compacto en un espacio, al ser transformada al espacio dual, su soporte ahora es

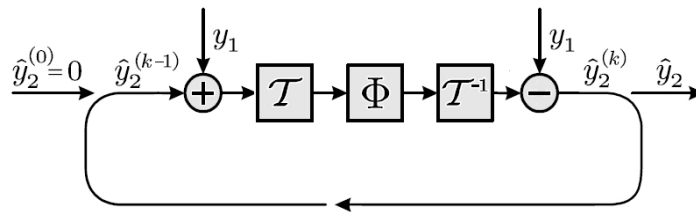
<sup>3</sup>Plano polar: Plano que contiene el *polo*, es decir, el origen coordenado.



**Figura 4-4.:** La transformada de Radon 2D aplicada sobre una proyección *parallel-beam* corresponde a los datos de la transformada de Radon 3D ubicados en un plano polar cuya dirección perpendicular es la dirección de los rayos.

infinito. Esto no sucede con la transformada de Radon, para la cual las funciones de soporte compacto tienen también un soporte compacto en el espacio de Radon. Esta es la principal diferencia entre el problema que se aborda en este trabajo y el de Egiazarian *et al.*

Con el objetivo de identificar las implicaciones de estas diferencias, el método de Egiazarian *et al.* se aplicó sobre los datos de la derivada de la transformada de Radon (ubicados en planos meridionales) para completar los datos faltantes del *shadow-zone*. En estos experimentos se estableció que el parámetro de ruido ( $\eta_k$ ) no evita mínimos locales sino que retrasa la convergencia del método, o hace que diverja completamente. Adicionalmente, el parámetro de promediado entre iteraciones consecutivas ( $\gamma_k$ ) retrasa la convergencia del método de manera proporcional al valor de  $1 - \gamma_k$ , es decir, entre más se aproxime  $\gamma_k$  a 1, más rápida es la convergencia. Teniendo en cuenta estas consideraciones, el método ilustrado en la Figura 3-3 se modificó eliminando la incorporación del ruido aleatorio y fijando el parámetro  $\gamma_k$  en 1, con lo cual queda reducido al diagrama que se presenta en la Figura 4-5.



**Figura 4-5.:** Diagrama del método propuesto

En este diagrama,  $\hat{y}_2$  corresponde a los datos faltantes del *shadow-zone*,  $\hat{y}_2^{(k)}$  representa estos datos en la iteración  $k$ -ésima y  $y_1$  corresponde a los datos conocidos, que se encuentran dentro del *Radon shell*.

Los bloques que componen cada iteración del método son:

- $T$ : En esta etapa se toman los datos de la derivada de Radon ubicados sobre los planos meridionales y a partir de éstos se calculan las correspondientes proyecciones *parallel-beam*. Esto es, se integran para obtener los datos de la transformada de Radon y se aplica algún método de inversión de dicha transformada. En este caso particular, la transformada inversa de Radon se calculó implementando el método de *retroproyección filtrada*.
- $\Phi$ : Esta etapa corresponde a la aplicación de un filtro adaptativo a cada proyección *parallel-beam*. En este caso, siguiendo la misma aproximación de Egiazarian *et. al.*, se aplica el filtro *Block-Matching 3D* (BM3D) descrito en [12].
- $T^{-1}$ : En esta etapa se calculan los nuevos datos de la derivada de Radon a partir de cada proyección *parallel-beam* filtrada. Es decir, se toma la proyección *parallel-beam* filtrada, se calcula su transformada de Radon y se deriva su sinograma en dirección de  $\rho$ .

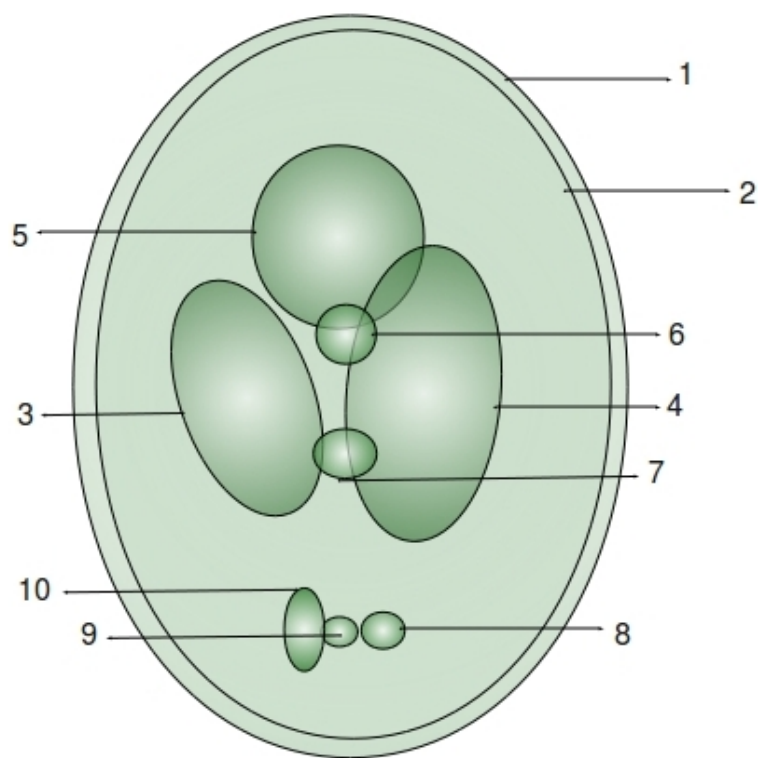
Este proceso se repite de manera iterativa hasta que los datos del *shadow-zone* de cada plano meridional converjan a un valor estable.

### 4.3. Resultados

En esta sección se probará de manera experimental los alcances y límites del método propuesto en este trabajo. Los objetivos principales de esta experimentación son: primero, probar el comportamiento del método con diferentes tamaños del *shadow-zone*, lo cual se logra variando el ángulo del cono. En estos experimentos, este valor se la distancia de la fuente de radiación; segundo, comparar los resultados del método propuesto con respecto a métodos de interpolación convencionales; y tercero, verificar los resultados obtenidos en diferentes etapas de la reconstrucción, específicamente en la generación de las proyecciones *parallel-beam* y en la reconstrucción completa.

El modelo de reconstrucción propuesto se evaluó utilizando como entrada las proyecciones *cone-beam* sintéticas calculadas para la versión tridimensional del volumen sintético simulado (*phantom*) *Shepp-Logan*. Este *phantom* es una imitación del cerebro humano ampliamente utilizado en reconstrucción CT para evaluar el desempeño de algoritmos de reconstrucción [42]. Consiste en la suma de 10 elipsoides (Figura 4-6) con parámetros listados en la Tabla 4-1. La ventaja de utilizar este volumen sintético al momento de realizar reconstrucciones en CT es que su transformada de Radon se puede calcular analíticamente. Las proyecciones son calculadas para un plano detector que, al ser proyectado sobre el origen coordenado, tiene un tamaño de 3.2x3.2.





**Figura 4-6.:** Imagen del *phantom* Shepp-Logan 3D. Cada elipsoide corresponde a los listados en la Tabla 4-1.

No. elipsoide	Semiejes del elipsoide $(a, b, c)$ en centímetros	Centro del elipsoide $(x, y, z)$ dado en centímetros	Angulos de rotación del elipsoide (en grados) $(\phi_x, \phi_y, \phi_z)$	Densidad
1	(6.9,8.1,9.2)	(0,0,0)	(0,0,0)	1.0
2	(6.624,7.8,8.74)	(0,0,-0.184)	(0,0,0)	-0.8
3	(1.1,2.2,3.1)	(2.2,0,0)	(-180,0,10)	-0.2
4	(1.6,2.8,41)	(-2.2,0,0)	(180,0,10)	-0.2
5	(2.1,4.1,2.5)	(0,-1.5,3.5)	(0,0,0)	0.1
6	(0.46,0.5,0.46)	(0,2.5,1)	(0,0,0)	0.1
7	(0.46,0.5,0.46)	(0,2.5,-1)	(0,0,0)	0.1
8	(0.46,0.5,0.23)	(-0.8,0,-6.05)	( 0,0,0)	0.1
9	(0.23,0.2,0.23)	(0,0,-6.06)	( 0,0,0)	0.1
10	(0.23,0.2,0.46)	(0.6 ,0,-6.05)	( 0,0,0)	0.1

**Tabla 4-1.:** Parámetros para los elipsoides que componen el phantom *Shepp-Logan* en su versión 3D. Cada elipsoide se caracteriza por sus semiejes (*columna 2*), las coordenadas de su centro (*columna 3*), los ángulos de rotación en cada eje (*columna 4*) y su densidad (*columna 5*).

Se seleccionaron dos diferentes medidas para comparar los métodos de interpolación y sus respectivas reconstrucciones:

- **Relación señal a ruido (*Peak Signal to Noise Ratio, PSNR*)**: mide la correspondencia entre niveles de intensidad de dos imágenes  $A$  y  $B$ :

$$\text{PSNR}(A, B) = 20 \log_{10} \left( \frac{\text{MAX}}{\sqrt{\text{MSE}(A, B)}} \right) \quad (4-2)$$

donde MAX es el mayor valor de intensidad en las imágenes a comparar, y el error cuadrático medio (*Mean Square Error, MSE*) se calcula con la siguiente ecuación:

$$\text{MSE}(A, B) = \frac{1}{MN} \sum_{i=0}^{M-1} \sum_{j=0}^{N-1} \|A(i, j) - B(i, j)\|^2 \quad (4-3)$$

$A$  es la imagen referencia, en este caso el corte del *phantom* o la proyección *parallel-beam* y  $B$  es la imagen resultante del método de interpolación y reconstrucción a partir de las proyecciones *cone-beam*. Los valores típicos del PSNR se encuentran entre 25 dB y 50 dB, donde más alto es mejor.

- **Índice de similitud estructural (*Structural Similarity Index (SSIM)*)**[50]: mide la similitud entre dos imágenes  $A$  y  $B$ , de una forma más consistente con el sistema visual humano.

Se calcula a partir de la comparación de parámetros estadísticos extraídos de ventanas de las imágenes. De esta manera, si  $x$  es una ventana de la imagen  $A$ , y  $y$  es una ventana de la imagen  $B$ , la similitud estructural entre  $x$  y  $y$  es:

$$\text{SSIM}(x, y) = \frac{(2\mu_x\mu_y + c_1)(2\sigma_{xy} + c_2)}{(\mu_x^2 + \mu_y^2 + c_1)(\sigma_x^2 + \sigma_y^2 + c_2)} \quad (4-4)$$

donde  $\mu_x$  y  $\mu_y$  son los valores promedios de intensidad de  $x$  y  $y$  respectivamente,  $\sigma_x^2$  y  $\sigma_y^2$  sus respectivas varianzas,  $\sigma_{xy}$  su covarianza y  $c_1 = (k_1L)^2$  y  $c_2 = (k_2L)^2$  son dos variables de estabilización para evitar valores muy pequeños en el denominador. En estas últimas variables  $L$  es el rango dinámico de los valores de los píxeles, y  $k_1 = 0,01$  y  $k_2 = 0,03$  por defecto. El SSIM resultante es un valor decimal comprendido entre -1 y 1, donde 1 solo es posible si las dos imágenes son idénticas.

#### 4.3.1. Reconstrucción variando la distancia de la fuente de radiación

Inicialmente se probó el método propuesto con proyecciones *cone-beam* generadas con diferentes distancias de la fuente de radiación y, por ende, diferentes tamaños del *shadow-zone*.

A menor distancia de la fuente de radiación, mayor es la cantidad de datos faltantes. Se utilizaron las siguientes distancias de la fuente de radiación: 15, 20, 40 y 60 centímetros. Los resultados obtenidos para estos experimentos están registrados en el Tabla 4-2.

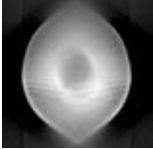
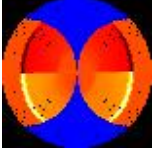
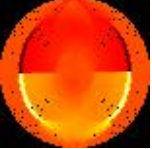
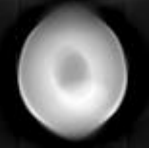
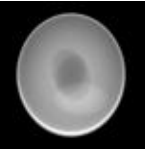
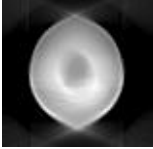
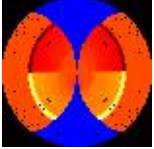
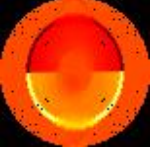
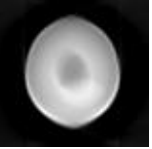
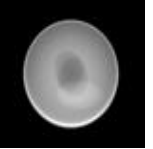
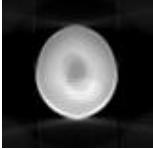
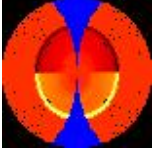

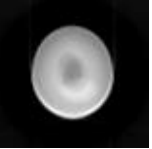
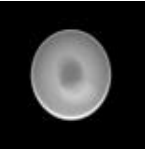
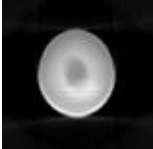
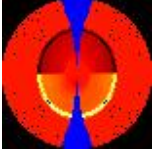
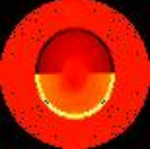
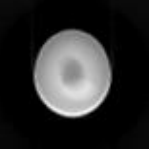

En dicha tabla se relacionan los siguiente datos: en la primera columna se encuentran las distancias de la fuente de radiación. La segunda columna representa la reconstrucción de una proyección *parallel-beam* ignorando los datos faltantes del *shadow-zone* (asumiendo que valen cero). Cada una de estas proyecciones cuenta con su PSNR asociado. En la tercera columna se presenta la imagen del plano meridional asociada a la proyección de la columna 1. En esta imagen el *shadow-zone* está marcado con color azul. La cuarta columna presenta la imagen del plano meridional después de aplicar el método de interpolación. En la quinta columna se encuentra la proyección *parallel-beam* resultante de la interpolación, y su respectivo valor de PSNR. La sexta columna presenta la proyección *parallel-beam* calculada analíticamente. Con respecto a esta proyección *parallel-beam* están calculados los valores de PSNR presentados en las columnas 2 y 5.

Es necesario considerar que a medida que la fuente de radiación se aleja, más pequeño es el *shadow-zone*, menor es la cantidad de datos a estimar y, por ende, se cuenta con mayor información de la señal real. Esto se ve reflejado en el aumento del PSNR en la reconstrucción. Sin embargo, se evidencia una mejora superior a 2 dB al aplicar el método propuesto, con respecto a la estrategia de asignar ceros en las posiciones de los datos faltantes.

#### 4.3.2. Comparación entre métodos de interpolación sobre las proyecciones parallel-beam

Igualmente, se hizo un estudio comparativo con diferentes métodos de interpolación aplicados sobre el *shadow-zone*, utilizando diferentes métodos de interpolación unidimensional sobre el sinograma derivado incompleto. Estos son:

- **Relleno con ceros:** Los datos del *shadow-zone* son completados con ceros.
- **Relleno con un valor constante en dirección de  $\theta$ :** Los datos son agrupados por aquellos que tienen la misma coordenada  $\rho$ . Una vez hecho esto, los datos del *shadow-zone* son rellenados con un valor constante. Este valor es el promedio de los datos existentes.
- **Interpolación *spline* cúbica en dirección de  $\theta$ :** Los datos se agrupan por la coordenada  $\rho$ , y se aplica una interpolación *spline* en dirección  $\theta$  para estimar los datos faltantes del *shadow-zone*.
- **Relleno con un valor constante en dirección de  $\rho$ :** Los datos son agrupados por la coordenada  $\theta$  y se asigna a los datos faltantes el valor promedio de los datos existentes.

Dist.	Proyección <i>parallel-beam</i> inicial	Plano meridional inicial	Plano meridional final	Proyección <i>parallel-beam</i> final	Proyección <i>parallel-beam</i> objetivo
1.5	 PSNR = 14.94	 SZ % = 22.36		 PSNR = 19.39	
2	 PSNR = 16.43	 SZ % = 18.65		 PSNR = 20.53	
4	 PSNR = 20.28	 SZ % = 9.81		 PSNR = 24.35	
6	 PSNR = 22.49	 SZ % = 6.27		 PSNR = 24.26	

**Tabla 4-2.:** Interpolación del shadow-zone para diferentes distancias de la fuente de radiación. Columna 1: distancia de la fuente de radiación. Columna 2: Proyección *parallel-beam* sin rellenar el *shadow-zone*. Columna 3: plano meridional en el espacio de Radon derivado. El color azul representa el *shadow-zone*. Columna 4: Plano meridional después del proceso de interpolación. Columna 5: proyección *parallel-beam* resultante. columna 6: Proyección *parallel-beam* a la que se quiere llegar, calculada a partir del phantom voxelado.

- **Interpolación lineal en dirección de  $\rho$ :** Los datos son agrupados por la coordenada  $\theta$  y se desarrolla una interpolación lineal en los intervalos donde no existen datos.

Las distancias de la fuente de radiación usadas fueron: 15, 18, 20, 27, 30, y 50 centímetros. Cada proyección *parallel-beam* se compara con su respectiva proyección calculada analíticamente a partir del *phantom*. Los resultados obtenidos se relacionana en la Tabla 4-3.

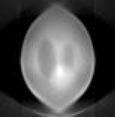
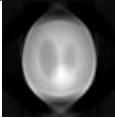
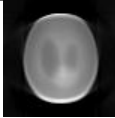
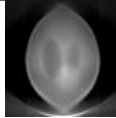
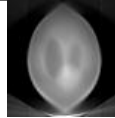
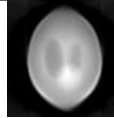
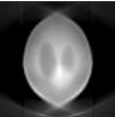
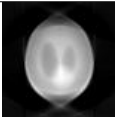
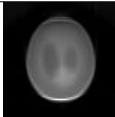
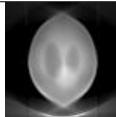
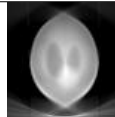
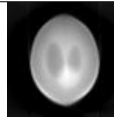

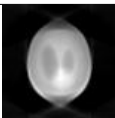
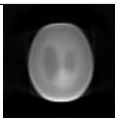
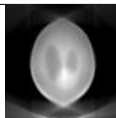
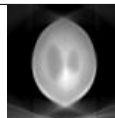
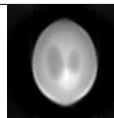
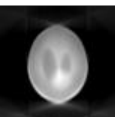
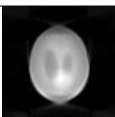
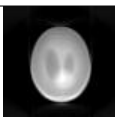
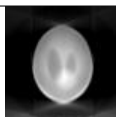
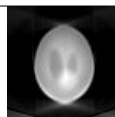
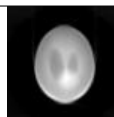
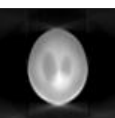
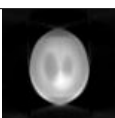
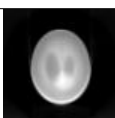
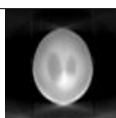

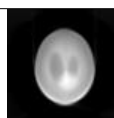
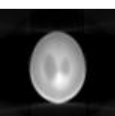
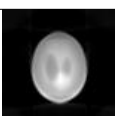
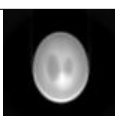
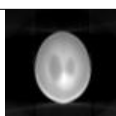
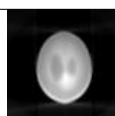
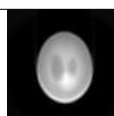
Cada fila de la Tabla 4-3 contiene los resultados de los diferentes métodos de interpolación, para cada distancia de la fuente de radiación. En la primera columna se encuentran las distancias de la fuente de radiación. En las columnas 2-7 se encuentran los resultados de los diferentes métodos de interpolación con sus respectivos valores de PSNR y SSIM y la imagen de una proyección *parallel-beam* para evaluar cualitativamente los efectos de la aplicación de cada método de interpolación. La segunda columna contiene el resultado de aplicar el relleno con ceros; la tercera, el relleno constante en dirección de  $\theta$ ; la cuarta, la interpolación *spline* cúbica en dirección de  $\theta$ ; la quinta, el relleno con un valor constante en dirección de  $\rho$ ; la sexta, la interpolación lineal en dirección de  $\rho$ ; y, finalmente, la séptima columna contiene los resultados del método propuesto. Los mejores resultados de cada fila están resaltados en negrilla y color rojo.

El método propuesto supera en general a todos los demás para distancias menores a 3 unidades. A partir de esta distancia de la fuente de radiación, el método de interpolación *spline* en dirección  $\theta$  tiene un mejor rendimiento. Esto quiere decir que para distancias pequeñas de la fuente de radiación, y por ende, para *shadow-zones* grandes, el método propuesto estima con mayor precisión los datos faltantes.


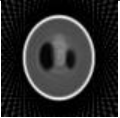
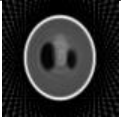


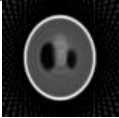

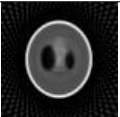
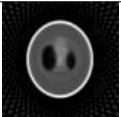




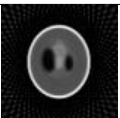
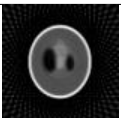
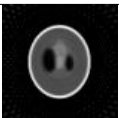
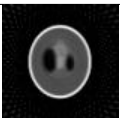
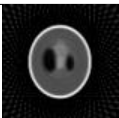

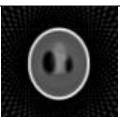
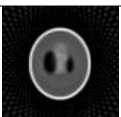



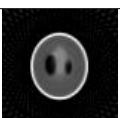
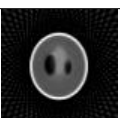
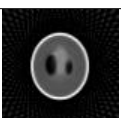
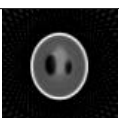
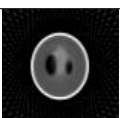
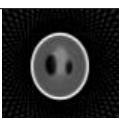
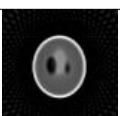
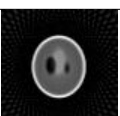
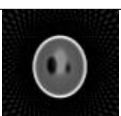
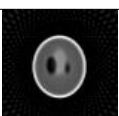
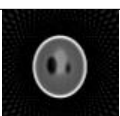
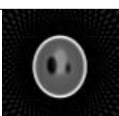
### 4.3.3. Comparación entre métodos de interpolación sobre la reconstrucción

Al igual que para el análisis de las proyecciones *parallel-beam*, la Tabla 4-4 muestra los resultados de las diferentes interpolaciones, ahora midiéndolas sobre cortes axiales de la reconstrucción final. Los métodos de interpolación y la forma en la que se presentan los datos, al igual que las distancias de la fuente de radiación, son iguales a los presentados en la Tabla 4-3.

En esta tabla, los resultados muestran un mejor comportamiento para el método de interpolación *spline* cúbico en dirección de  $\theta$ . La razón por la que el liderazgo del método mostrado en el cálculo de las proyecciones *parallel-beam* no se refleja en esta etapa radica en que el método está dirigido a la regularización los datos de las proyecciones, y es allí donde muestra un mejor rendimiento.

Dist.	Relleno con zeros	Relleno constante en $\theta$	<i>Spline</i> cúbica en $\theta$	Relleno constante en $\rho$	Int. lineal en $\rho$	Método propuesto
1.5	 PSNR=14.9411 SSIM=0.5409	 PSNR=17.1443 SSIM=0.5281	 PSNR=14.4385 SSIM=0.6088	 PSNR=15.7156 SSIM=0.5242	 PSNR=7.5228 SSIM=0.5659	 <b>PSNR=19.3935</b> <b>SSIM=0.6313</b>
1.8	 PSNR=16.0728 SSIM=0.5559	 PSNR=18.7518 SSIM=0.5567	 PSNR=18.9384 SSIM=0.6747	 PSNR=15.5489 SSIM=0.5530	 PSNR=16.0692 SSIM=0.5753	 <b>PSNR=20.9120</b> <b>SSIM=0.6840</b>
2	 PSNR=16.4270 SSIM=0.5474	 PSNR=18.7384 SSIM=0.6002	 PSNR=19.2948 SSIM=0.7066	 PSNR=15.5634 SSIM=0.5436	 PSNR=15.9690 SSIM=0.5517	 <b>PSNR=20.5322</b> <b>SSIM=0.7118</b>
2.7	 PSNR=18.7383 SSIM=0.5371	 PSNR=21.1192 SSIM=0.6177	 PSNR=22.5894 SSIM=0.6500	 PSNR=16.9886 SSIM=0.5329	 PSNR=18.4421 SSIM=0.5549	 <b>PSNR=22.7389</b> <b>SSIM=0.7438</b>
3	 PSNR=19.1020 SSIM=0.5381	 PSNR=21.4886 SSIM=0.6358	 <b>PSNR=23.3827</b> SSIM=0.6590	 PSNR=17.1910 SSIM=0.5336	 PSNR=18.9511 SSIM=0.5552	 PSNR=22.6171 <b>SSIM=0.7368</b>
5	 PSNR=21.3385 SSIM=0.5529	 PSNR=22.6511 SSIM=0.6651	 <b>PSNR=23.9816</b> <b>SSIM=0.7737</b>	 PSNR=20.0916 SSIM=0.5502	 PSNR=20.7290 SSIM=0.5534	 PSNR=23.2033 SSIM=0.7574

**Tabla 4-3.:** Comparación de los valores de **PSNR** obtenidos para las proyecciones *parallel-beam* utilizando diferentes métodos de interpolación y para diferentes distancias de la fuente de radiación.

Dist.	Relleno con zeros	Relleno constante en $\theta$	<i>Spline</i> cúbica en $\theta$	Relleno constante en $\rho$	Int. lineal en $\rho$	Método propuesto
1.5	 PSNR=18.3774 SSIM=0.4499	 PSNR=19.8511 SSIM=0.4222	 <b>PSNR=20.2287</b> <b>SSIM=0.5080</b>	 PSNR=18.4519 SSIM=0.4477	 PSNR=19.1753 SSIM=0.4609	 PSNR=19.8629 SSIM=0.4442
1.8	 PSNR=20.0775 SSIM=0.4794	 PSNR=21.6385 SSIM=0.4677	 <b>PSNR=22.6788</b> <b>SSIM=0.6358</b>	 PSNR=19.4244 SSIM=0.4606	 PSNR=20.1008 SSIM=0.4542	 PSNR=21.4003 SSIM=0.4776
2	 PSNR=20.5200 SSIM=0.4725	 PSNR=21.2445 SSIM=0.4668	 <b>PSNR=22.2286</b> <b>SSIM=0.5952</b>	 PSNR=20.0374 SSIM=0.4519	 PSNR=20.3483 SSIM=0.4336	 PSNR=21.3444 SSIM=0.4949
2.3	 PSNR=22.4965 SSIM=0.5172	 PSNR=22.5750 SSIM=0.4856	 <b>PSNR=24.1553</b> <b>SSIM=0.6300</b>	 PSNR=21.9353 SSIM=0.4944	 PSNR=22.1876 SSIM=0.4666	 PSNR=22.4651 SSIM=0.5110
2.7	 PSNR=22.4639 SSIM=0.5016	 PSNR=23.1437 SSIM=0.5122	 <b>PSNR=23.6808</b> SSIM=0.5491	 PSNR=21.9427 SSIM=0.4728	 PSNR=22.1505 SSIM=0.4427	 PSNR=23.4121 <b>SSIM=0.5495</b>
5	 PSNR=23.5914 SSIM=0.6304	 PSNR=23.5188 SSIM=0.5944	 <b>PSNR=24.5083</b> <b>SSIM=0.6452</b>	 PSNR=23.4094 SSIM=0.5353	 PSNR=23.5009 SSIM=0.5707	 PSNR=24.1575 SSIM=0.6304

**Tabla 4-4.:** Comparación de los valores de **PSNR** obtenidos para la reconstrucción final utilizando diferentes métodos de interpolación y para diferentes distancias de la fuente de radiación.



## 5. Conclusiones

Para una trayectoria circular de la fuente de radiación, el incumplimiento de la condición de suficiencia se vé reflejada en la ausencia de datos de la derivada de Radón del objeto en una zona del espacio de Radón 3D conocida como *shadow-zone*. Con el fin de mejorar la calidad de la reconstrucción haciendo uso de la relación de Grangeat, el *shadow-zone* debe ser rellenado, es decir, sus datos deben ser estimados con algún tipo de estrategia.

El relleno del *shadow-zone* suele tratarse como un problema de interpolación de datos, el cual se reduce a la aplicación de un método tradicional de interpolación convencional, tales como la *interpolación lineal* o la *interpolación spline*. Como tal, ninguno de estos métodos explota la naturaleza de la derivada de Radón y, por ende, dicha estimación es susceptible de mejorarse.

En este trabajo se propuso un método de estimación para los datos del *shadow-zone*, el cual busca regularizar las proyecciones *parallel-beam*, asociadas a cada plano meridional. Dicha regularización se desarrolla por medio de la aplicación iterativa de un filtro adaptativo y el reemplazo consecutivo de los valores del *shadow-zone* hasta que dichos valores converjan. La regularización de las proyecciones *parallel-beam* busca eliminar los artefactos producidos por la ausencia o estimación errónea de los datos del *shadow-zone*.

En etapas intermedias de la reconstrucción, como el cálculo de las proyecciones *parallel-beam*, y para distancias pequeñas de la fuente de radiación, el método propuesto mejora hasta en 2 dB la reconstrucción obtenida. La competitividad del método en esta etapa específica es el reflejo de que el método se encuentra enfocado especialmente en regularizar los datos de las proyecciones *parallel-beam*.

### 5.1. Trabajos futuros

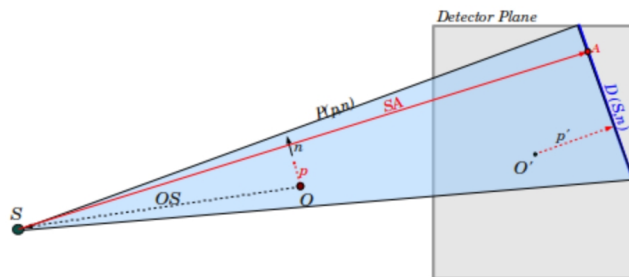
El método aquí propuesto corresponde a una exploración inicial para el relleno del *shadow-zone* y, como tal, abre la puerta a un conjunto de trabajos futuros destinados a profundizar el entendimiento referente a la naturaleza de los datos a interpolar y a verificar la aplicación de este método para la reconstrucción *cone-beam* de objetos o pacientes reales. A continuación se presenta una lista de las ideas actuales que se tienen para dichos proyectos:

- **Validación con datos reales:** La validación del método en este trabajo se realizó completamente con datos simulados. En estos experimentos se ignora la complejidad interna de los objetos a reconstruir, así como los errores derivados de la captura.

- **Extensión del método a la regularización tridimensional:** El método descrito explota la relación entre planos meridionales y proyecciones *parallel-beam* para rellenar el *shadow-zone*, por medio de la regularización de dichas proyecciones. Es decir, divide el problema de interpolación/extrapolación de datos 3D en varias interpolaciones/extrapolaciones 2D. Una opción para mejorar la calidad de la reconstrucción consistiría en estudiar la regularidad de la función 3D reconstruída. Con esto, se esperaría mejorar la reconstrucción, dado que se explotaría la consistencia de todos los datos en las tres dimensiones de manera simultánea.
- **Caracterización matemática de la derivada de Radón:** Una alternativa explorada durante el desarrollo de este trabajo consistió en agrupar los datos en arreglos unidimensionales y desarrollar un método de interpolación para cada agrupamiento que explotara la naturaleza de las funciones contenidas en dichos arreglos. Esta alternativa se vió limitada por el conocimiento matemático de la función a interpolar, dado que para esta caracterización se asumieron comportamientos o propiedades que no necesariamente coincidían con el comportamiento y propiedades reales de la función. Con una caracterización precisa de la derivada de Radón sobre estos arreglos 1D se esperaría seguir con esta aproximación, reduciendo la complejidad computacional actual del método.
- **Desarrollo de un nuevo método de estimación buscando mantener la consistencia de la derivada de Radón:** La transformada de Radón de toda función debe cumplir con unas condiciones de consistencia. Estas condiciones podrían utilizarse para proponer un método que permita caracterizar los datos del *shadow-zone*, de tal forma que cumplan con estas condiciones.

## A. Relación de Grangeat

En CT, se ha establecido que no es posible calcular la transformada de Radón a partir de proyecciones *cone-beam*, pero sí es posible calcular su derivada. Esta relación matemática ha sido presentada por Grangeat en [16], y su formulación detallada se presenta a continuación.



**Figura A-1.:** Ilustración de los parámetros necesarios para la Relación de Grangeat.

A partir de la Figura **A-1** se establece la siguiente notación, necesaria para el desarrollo matemático de la Relación de Grangeat:

- $f(x)$ : Función espacial 3D con soporte compacto, que corresponde a la densidad espacial del cuerpo humano.
- $S$ : Posición espacial de la fuente de radiación.
- $O$ : Origen del espacio.
- $O'$ : Origen de un sistema de coordenadas cartesianas sobre el plano detector. Es también el punto más cercano a  $S$  y  $O$  en el plano detector.
- $\rho$ : Coordenada radial en un sistema de coordenadas esférico en el espacio tridimensional. Es también la distancia desde cualquier plano 3D a  $O$ .
- $\rho'$ : Coordenada radial en un sistema de coordenadas polar sobre el plano detector. Es también la distancia desde cualquier línea recta en el plano detector a  $O'$ .
- $A$ : Ubicación espacial 3D de cada punto en el plano detector.
- $\vec{n}$ : El vector normal unitario para un plano dado en el espacio 3D.

- $\overrightarrow{SO}$ : El vector definido desde  $S$  a  $O$ .
- $\overrightarrow{SO'}$ : El vector definido desde  $S$  a  $O'$ .
- $\overrightarrow{SA}$ : El vector definido desde  $S$  a  $A$ .
- $P(\rho, \vec{n})$ : Plano en el espacio tridimensional cuyo punto más cercano al origen está ubicado en  $\rho \vec{n}$ . Es decir, su vector normal unitario es  $\vec{n}$ , y su distancia a  $O$  es  $\rho$ .
- $D(S, \vec{n})$ : Una línea recta en el plano detector, dada por la intersección entre el plano detector y  $P(\rho, \vec{n})$ .
- $R(\rho, \vec{n})$ : Integral de la función de densidad espacial en  $P(\rho, \vec{n})$ . Es decir, la transformada de Radón de la función.
- $Xf(S, A)$ : Transformada *cone-beam*, correspondiente al conjunto de integrales de línea de  $f(x)$  cuando se intersectan en el mismo punto espacial  $S$ . Se define con la siguiente ecuación:

$$Xf(S, A) = \int_{\mathbb{R}^+} f(S + a\vec{u}) da \quad (\text{A-1})$$

donde  $\vec{u}$  es un vector unitario que indica la dirección del rayo.

- $Yf(S, A)$ : Proyección *cone-beam* ponderada, dada por el hecho de que no todos los rayos  $X$  caen de manera perpendicular sobre el plano detector. Se calcula con la siguiente ecuación:

$$Yf(S, A) = \frac{\|\overrightarrow{SO'}\|}{\|\overrightarrow{SA}\|} \cdot Xf(S, A) \quad (\text{A-2})$$

- $SYf(S, \vec{n})$ : Integral de línea sobre la proyección *cone-beam* ponderada. La integral representa la intersección del plano detector y el plano espacial que pasa a través de  $S$  y cuyo vector normal es  $\vec{n}$ ; también se define como  $D(S, \vec{n})$ . Se calcula con la siguiente ecuación:

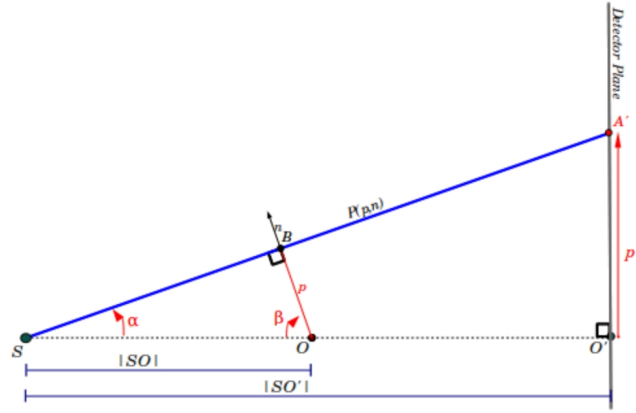
$$SYf(S, \vec{n}) = \int_{A \in D(S, \vec{n})} Yf(S, A) dA \quad (\text{A-3})$$

Con estos elementos, Grangeat relaciona en su artículo [16] la transformada *cone-beam* y la transformada de Radón de la siguiente forma:

$$\frac{\|\overrightarrow{SO'}\|^2}{\|\overrightarrow{SO'} \times \vec{n}\|^2} \cdot \frac{\partial SYf(S, \vec{n})}{\partial \rho'} = \frac{\partial R(\rho, \vec{n})}{\partial \rho} \quad (\text{A-4})$$

donde  $\times$  denota el producto cruz. De la forma en que está planteada, se hace difícil imaginar el significado de esta relación, sin embargo, es posible reescribirla y separarla en diferentes términos, que permitan clarificar su naturaleza.

Primero, se requiere dibujar una proyección ortogonal para la Figura A-1, donde el plano detector y  $P(\rho, \vec{n})$  aparezcan o se presenten como líneas rectas. Esta es también la proyección ortogonal en dirección  $D(S, \vec{n})$ , representada en la Figura A-2. En esta Figura,  $D(S, \vec{n})$  aparece como un único punto  $A'$ , que corresponde espacialmente con el punto en  $D(S, \vec{n})$  más cercano a  $S$ . El punto  $B$  es el más cercano a  $S$  en  $P(\rho, \vec{n})$ ,  $\beta$  representa el ángulo entre  $\vec{OS}$  y  $\vec{n}$  y  $\alpha$ , complementario a  $\beta$ , es el ángulo entre  $\vec{SO}$  y  $P(\rho, \vec{n})$ .



**Figura A-2.:** Proyección ortogonal para la Figura A-1.

En esta gráfica es posible identificar que

$$\|\vec{SO'} \times \vec{n}\| = \|\vec{SO'}\| \|\vec{n}\| \sin \beta$$

y, teniendo en cuenta que  $\alpha$  y  $\beta$  son complementarios, se puede reescribir como

$$\|\vec{SO'} \times \vec{n}\| = \|\vec{SO'}\| \|\vec{n}\| \cos \alpha$$

Reemplazando esta equivalencia en el primer término de la Ecuación A-4 se obtiene:

$$\frac{\|\vec{SO'}\|^2}{\|\vec{SO'} \times \vec{n}\|^2} = \frac{\|\vec{SO'}\|^2}{\|\vec{SO'}\|^2 \|\vec{n}\|^2 \cos^2 \alpha} = \sec^2 \alpha$$

Teniendo en cuenta que

$$\frac{\partial(\tan \alpha)}{\partial \alpha} = \sec^2 \alpha$$

y, como se muestra en la Figura **A-2**,

$$\rho' = \|SO'\| \tan \alpha$$

el factor del lado derecho en la Relación de Grangeat puede reescribirse de la siguiente manera:

$$\frac{\|\vec{SO'}\|^2}{\|\vec{SO'} \times \vec{n}\|^2} = \sec^2 \alpha = \frac{1}{\|\vec{SO'}\|} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial \alpha}$$

y con esto, la Relación de Grangeat puede escribirse así:

$$\frac{1}{\|\vec{SO'}\|} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial SYf(S, \vec{n})}{\partial \rho'} = \frac{\partial R(\rho, \vec{n})}{\partial \rho}$$

Separando esta fórmula en todos sus componentes originales, se obtiene:

$$\frac{1}{\|\vec{SO'}\|} \cdot \frac{\partial \rho'}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho'} \left( \underbrace{\int_{A \in D(S, \vec{n})} \overbrace{\frac{\|\vec{SO'}\|}{\|\vec{SA}\|} \cdot Xf(S, A)}^{Yf(S, A)} dA}_{SYf(S, \vec{n})} \right) = \frac{\partial R(\rho, \vec{n})}{\partial \rho}$$

y teniendo en cuenta que  $\frac{1}{\|\vec{SO'}\|}$  es una constante, la fórmula es igual a:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho'} \left( \underbrace{\int_{A \in D(S, \vec{n})} \overbrace{\frac{1}{\|\vec{SA}\|} \cdot Xf(S, A)}^{Y'f(S, A)} dA}_{SY'f(S, \vec{n})} \right) = \frac{\partial R(\rho, \vec{n})}{\partial \rho}$$

donde se ha definido una nueva proyección *cone-beam* ponderada

$$Y'f(S, A) = \frac{1}{\|\vec{SA}\|} \cdot Xf(S, A) \tag{A-5}$$

que divide cada dato en la transformada *cone-beam* por su distancia del plano detector a  $S$ . Y su correspondiente integral sobre la línea de intersección entre el plano detector y  $P(\rho, \vec{n})$  se define como:

$$SY'f(S, \vec{n}) = \int_{A \in D(S, \vec{n})} Y'f(S, A) dA \quad (\text{A-6})$$

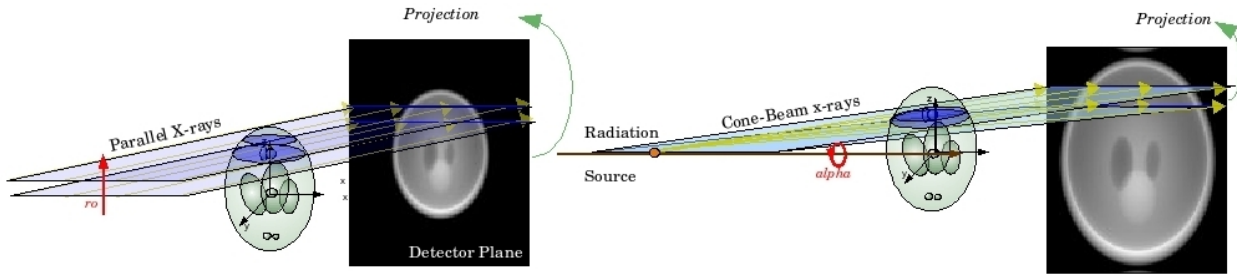
De esta forma, una vez se reescribe la Relación de Grangeat como:

$$\frac{\partial \rho'}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial SY'f(S, \vec{n})}{\partial \rho'} = \frac{\partial R(\rho, \vec{n})}{\partial \rho}$$

su forma final se convierte en:

$$\frac{\partial SY'f(S, \vec{n})}{\partial \alpha} = \frac{\partial R(\rho, \vec{n})}{\partial \rho} \quad (\text{A-7})$$

Con esta expresión, la Relación de Grangeat afirma que la diferencia entre las integrales sobre dos líneas paralelas de una función ponderada de manera uniforme es igual a la diferencia de las integrales sobre dos planos (siendo un plano la rotación del otro sobre un eje con la misma dirección de  $D(S, \vec{n})$  y que contiene a  $S$ ), dando más peso a los puntos más cercanos a  $S$ . Esta relación se ilustra en la Figura A-3.



**Figura A-3.:** Representación gráfica de la Relación de Grangeat. A la izquierda, proyecciones *parallel-beam*; a la derecha, proyecciones *cone-beam*.

## B. Productos

### **Ponencia en Conferencia Nacional**

Carlos Jiménez y Eduardo Romero. *Interpolación de Datos de Radón en una Grilla Esférica a Partir de Proyecciones Cone-beam con Métodos Basados En Fourier*. Memorias del Quinto Seminario de Ingeniería Biomédica y Quinto Seminario Internacional de Procesamiento y Análisis de Imágenes Médicas - SIB-SIPAIM 2009. Noviembre 26 y 27 de 2009.

Carlos Jiménez y Eduardo Romero. *Interpolación de los datos de Radón a partir de proyecciones tomográficas Cone-Beam en trayectoria circular*. Memorias del Séptimo Seminario Internacional de Procesamiento y Análisis de Imágenes Médicas - SIPAIM 2011. Diciembre 5 al 7 de 2011.



# Bibliografía

- [1] ALDROUBI, A.: Non-uniform weighted average sampling and reconstruction in shift-invariant and wavelet spaces. En: *Applied and Computational Harmonic Analysis* 13 (2002), September, Nr. 2, p. 151–161. – ISSN 10635203
- [2] ALDROUBI, Akram ; GRÖCHENIG, Karlheinz: Nonuniform Sampling and Reconstruction in Shift-Invariant Spaces. En: *SIAM Rev.* 43 (2001), Nr. 4, p. 585–620. – ISSN 0036–1445
- [3] BAE, K. T. ; WHITING, B. R.: CT data storage reduction by means of compressing projection data instead of images: feasibility study. En: *Radiology* 219 (2001), June, Nr. 3, p. 850–855. – ISSN 0033–8419
- [4] BAE, Kyongtae T. ; WHITING, Bruce R.: Method and apparatus for compressing computed tomography raw projection data. (2003), December
- [5] BAISCH, S.: Spectral analysis with incomplete time series: an example from seismology. En: *Computers & Geosciences* 25 (1999), August, Nr. 7, p. 739–750. – ISSN 00983004
- [6] BECKMANN, E. C.: CT scanning the early days. En: *The British journal of radiology* 79 (2006), January, Nr. 937, p. 5–8. – ISSN 0007–1285
- [7] CANDÈS, E. ; DONOHO, D.: Curvelets: A Surprisingly Effective Nonadaptive Representation of Objects with Edges. 1999. – Informe de Investigación
- [8] CANDÈS, E. J. ; ROMBERG, J. ; TAO, T.: Robust uncertainty principles: exact signal reconstruction from highly incomplete frequency information. En: *IEEE Transactions on Information Theory* 52 (2006), Februar, Nr. 2, p. 489–509. – ISSN 0018–9448
- [9] CANDÈS, E. J. ; WAKIN, M. B.: An Introduction To Compressive Sampling. En: *Signal Processing Magazine, IEEE* 25 (2008), März, Nr. 2, p. 21–30. – ISSN 1053–5888
- [10] CANDÈS, J. E.: *Ridgelets: Theory and Applications*, Stanford University, Tesis de Grado, September 1998
- [11] CHEN, Zhe ; FENG, David D. ; CAI, Weidong: Temporal and Spatial Compression of Dynamic Positron Emission Tomography in Sinogram Domain. En: *International Journal of Image and Graphics* 5 (2005), October, Nr. 4, p. 839–858

- [12] DABOV ; FOI ; KATKOVNIK ; EGIAZARIAN: Image Denoising by Sparse 3-D Transform-Domain Collaborative Filtering. En: *IEEE Transactions on Image Processing* 16 (2007), August, Nr. 8, p. 2080–2095. – ISSN 1057–7149
- [13] DO, M. N. ; VETTERLI, M.: Contourlets: a new directional multiresolution image representation. En: *Signals, Systems and Computers, 2002. Conference Record of the Thirty-Sixth Asilomar Conference on* Vol. 1, 2002, p. 497–501 vol.1
- [14] EGIAZARIAN, Karen ; FOI, Alessandro ; KATKOVNIK, Vladimir: Compressed Sensing Image Reconstruction Via Recursive Spatially Adaptive Filtering, 2007, p. I – 549–I – 552
- [15] FELDKAMP, L. A. ; DAVIS, L. C. ; KRESS, J. W.: Practical cone-beam algorithm. En: *J. Opt. Soc. Am. A* 1 (1984), Juni, Nr. 6, p. 612–619
- [16] GRANGEAT, Pierre: Mathematical framework of cone beam 3D reconstruction via the first derivative of the radon transform. 1991, p. 66–97
- [17] HERMAN, Gabor T.: *Fundamentals of Computerized Tomography: Image Reconstruction from Projections*. Springer, 2010 (Advances in Pattern Recognition). – ISBN 978–1–85233–617–2
- [18] HOUNSFIELD, G.: Computed Medical Imaging: Nobel Lecture in physiology or medicine 1971-1980. (1979), December, p. 568–586
- [19] HOUNSFIELD, G. N.: Computerized transverse axial scanning (tomography). 1. Description of system. En: *The British journal of radiology* 46 (1973), Dezember, Nr. 552, p. 1016–1022. – ISSN 0007–1285
- [20] HSIEH, Jiang: *Computed Tomography: Principles, Design, Artifacts, and Recent Advances*,. SPIE Press, November 2009. – ISBN 9780819475336
- [21] LANDAU, H.: Necessary density conditions for sampling and interpolation of certain entire functions. En: *Acta Mathematica* 117 (1967), Juli, Nr. 1, p. 37–52. – ISSN 0001–5962
- [22] LEE, Seung W. ; WANG, Ge: A Grangeat-type half-scan algorithm for cone-beam CT. En: *Medical Physics* 30 (2003), Nr. 4, p. 689–700
- [23] LEE, Seung W. ; WANG, Ge ; CHO, Gyuseong: Artifacts associated with implementation of the Grangeat formula. En: *Medical Physics* 29 (2002), November, Nr. 12
- [24] LIEW, Alan W. ; XIAN, Jun ; WU, Shuanhu ; SMITH, David ; YAN, Hong: Spectral estimation in unevenly sampled space of periodically expressed microarray time series data. En: *BMC Bioinformatics* 8 (2007), April, Nr. 1, p. 137+

- [25] LOMB, N. R.: Least-squares frequency analysis of unequally spaced data. En: *Astrophysics and Space Science* 39 (1976), February, Nr. 2, p. 447–462. – ISSN 0004–640X
- [26] MALLAT, S. G.: A Theory for Multiresolution Signal Decomposition: The Wavelet Representation. En: *IEEE Trans. Pattern Anal. Mach. Intell.* 11 (1989), July, Nr. 7, p. 674–693. – ISSN 0162–8828
- [27] MARTIN, Richard J.: *Irregularly Sampled Signals: Theories and Techniques for Analysis*, Tesis de Grado, January 1998
- [28] MARZILIANO, Pina ; VETTERLI, Martin: *Sampling innovations*, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Tesis de Grado, 2001
- [29] MASRY, E.: Poisson sampling and spectral estimation of continuous-time processes. En: *IEEE Transactions on Information Theory* 24 (1978), March, Nr. 2, p. 173–183. – ISSN 0018–9448
- [30] MUELLER, K. ; YAGEL, R.: Rapid 3-D cone-beam reconstruction with the simultaneous algebraic reconstruction technique (SART) using 2-D texture mapping hardware. En: *Medical Imaging, IEEE Transactions on* 19 (2000), Nr. 12, p. 1227–1237
- [31] NATTERER, Frank: *The mathematics of computerized tomography*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2001. – ISBN 0–89871–493–1
- [32] NATTERER, Frank ; WUBBELING, Frank: *Monographs on Mathematical Modeling and Computation*. Vol. 5: *Mathematical methods in image reconstruction*. Cambridge University Press, Januar 2001. – ISBN 9780898714722
- [33] NEOPHYTOU, N. ; XU, F. ; MUELLER, K.: Hardware acceleration vs. algorithmic acceleration: can GPU-based processing beat complexity optimization for CT? En: *Society of Photo-Optical Instrumentation Engineers (SPIE) Conference Series* Vol. 6510, 2007
- [34] NYQUIST, H.: Certain Topics in Telegraph Transmission Theory. En: *Transactions of the American Institute of Electrical Engineers* 47 (1928), April, Nr. 2, p. 617–644. – ISSN 0096–3860
- [35] RASHID-FARROKHI, F. ; LIU, K. J. R. ; BERENSTEIN, C. A. ; WALNUT, D.: Localized wavelet based computerized tomography. En: *Image Processing, 1995. Proceedings, International Conference on* Vol. 2, 1995, p. 445–448 vol.2
- [36] ROBERTS, D. H. ; LEHAR, J. ; DREHER, J. W.: Time Series Analysis with Clean. I. Derivation of a Spectrum. En: *The Astronomical Journal* 93 (1987), p. 968

- [37] ROJO-ALVAREZ, J. L. ; FIGUERA-POZUELO ; MARTINEZ-CRUZ, C. E. ; CAMPS-VALLS ; ALONSO-ATIENZA ; MARTINEZ-RAMON: Nonuniform Interpolation of Noisy Signals Using Support Vector Machines. En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 55 (2007), August, Nr. 8, p. 4116–4126. – ISSN 1053–587X
- [38] SANCHES, I. J. ; RIBEIRO, E. P.: Lossless image compression of computerized tomography projections. En: *Computer Graphics and Image Processing, 2001 Proceedings of XIV Brazilian Symposium on*, 2001, p. 385+
- [39] SCARGLE, J. D.: Studies in astronomical time series analysis. II - Statistical aspects of spectral analysis of unevenly spaced data. En: *Astrophysical Journal* 263 (1982), December, p. 835–853
- [40] SCHULZ, M.: Spectrum: spectral analysis of unevenly spaced paleoclimatic time series. En: *Computers & Geosciences* 23 (1997), November, Nr. 9, p. 929–945. – ISSN 00983004
- [41] SHANNON, C. E.: Communication in the Presence of Noise. En: *Proceedings of the IRE* 37 (1949), Januar, Nr. 1, p. 10–21. – ISSN 0096–8390
- [42] SHEPP, LA ; LOGAN, BF: Reconstructing interior head tissue from x-ray transmissions. En: *Nuclear Science, IEEE Transactions on* 21 (1974), Nr. 1, p. 228–236
- [43] SMITH, Bruce D.: Image Reconstruction from Cone-Beam Projections: Necessary and Sufficient Conditions and Reconstruction Methods. En: *Medical Imaging, IEEE Transactions on* 4 (1985), Nr. 1, p. 14–25
- [44] STOICA, Petre ; LI, Jian ; HE, Hao: Spectral Analysis of Nonuniformly Sampled Data: A New Approach Versus the Periodogram. En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 57 (2009), March, Nr. 3, p. 843–858. – ISSN 1053–587X
- [45] TARCZYNSKI, A. ; ALLAY, N.: Spectral Analysis of Randomly Sampled Signals: Suppression of Aliasing and Sampler Jitter. En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 52 (2004), December, Nr. 12, p. 3324–3334. – ISSN 1053–587X
- [46] TROPEA, C.: Laser Doppler anemometry: recent developments and future challenges. En: *Measurement Science and Technology* 6 (1995), June, Nr. 6, p. 605+. – ISSN 0957–0233
- [47] TURBELL, Henrik ; DANIELSSON, Per-Erik: Helical cone-beam tomography. En: *International Journal of Imaging Systems and Technology* 11 (2000), Nr. 1, p. 91–100
- [48] VENKATARAMANI, R. ; BRESLER, Y.: Optimal sub-Nyquist nonuniform sampling and reconstruction for multiband signals. En: *IEEE Transactions on Signal Processing* 49 (2001), Oct, Nr. 10, p. 2301–2313. – ISSN 1053587X

- 
- [49] VOGEL, Curtis R.: *Computational Methods for Inverse Problems (Frontiers in Applied Mathematics)*. Society for Industrial Mathematics, 2002 (Frontiers in Applied Mathematics). – ISBN 0898715504
  - [50] WANG, A.C. ; SHEIKH, H.R. ; SIMONCELLI, E.P.: Image quality assessment: from error visibility to structural similarity. En: *Image Pocessing,IEEE Transactions on* 13 (2004), p. 600–612
  - [51] WANG, X. Z. ; SHA, W. E. I.: Random Sampling Using Shannon Interpolation and Poisson Summation Formulae. En: *ArXiv e-prints* (2009), September
  - [52] YAN, X. ; LEAHY, R. M.: Cone beam tomography with circular, elliptical and spiral orbits. En: *Physics in Medicine and Biology* 37 (1992), Nr. 3, p. 493–506
  - [53] YARDIBI, T. ; LI, J. ; STOICA, P. ; XUE, M. ; BAGGEROER, A.B: Iterative adaptive approach for sparse signal representation with sensing application. En: *IEEE Transactions on Aerospace Electronic Systems., in press*
  - [54] YAROSLAVSKY, Leonid P. ; SHABAT, Gil ; SALOMON, Benny G. ; IDESES, Ianir A. ; FISHBAIN, Barak: Non-uniform sampling, image recovery from sparse data and the discrete sampling theorem. (2008), Aug
  - [55] ZHU, Jiehua ; LEE, Seung W. ; YE, Yangbo ; ZHAO, Shiyong ; WANG, Ge: X-ray transform and 3D Radon transform for ellipsoids and tetrahedra. En: *Journal of X-Ray Science and Technology* 12 (2004), Nr. 4, p. 215–229